



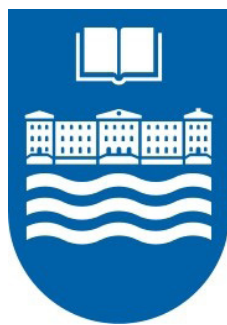
UNIVERSIDAD DE DEUSTO

**ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO
EN LOS PROCESOS
DE RESOLUCIÓN
DE PROBLEMAS
MATEMÁTICOS
POR ESTUDIANTES
UNIVERSITARIOS**

TESIS DOCTORAL
PRESENTADA POR
WILLIAM OSWALDO FLORES LÓPEZ
DENTRO DEL PROGRAMA DE
DOCTORADO EN EDUCACIÓN

Dirigida por:
Dra. Elena Auzmendi Escribano

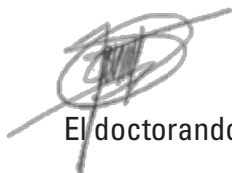
Bilbao, Abril de 2016



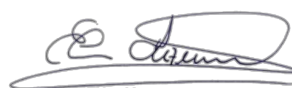
UNIVERSIDAD DE DEUSTO

ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO EN LOS PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

TESIS DOCTORAL
PRESENTADA POR
WILLIAM OSWALDO FLORES LÓPEZ
DENTRO DEL PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN



El doctorando



El director

Bilbao, Abril de 2016

© Bilbao, 2016

**Tesis: Análisis
ontosemiótico en
los procesos de
resolución de problemas
matemáticos por
estudiantes universitarios**

Presentada por:

William Oswaldo Flores López

Dirigida por:

Elena Auzmendi Escribano

Diseño y diagramación:

Francisco Saballos

RESUMEN

En esta investigación se han analizado los procesos de resolución de problemas matemáticos que llevan a cabo los estudiantes universitarios. El propósito ha sido explicar las dificultades en la resolución de problemas matemáticos en términos de los procesos matemáticos y las actitudes hacia dicha disciplina. Se trata de un estudio cuantitativo y cualitativo sustentado en un diseño “Ex Post Facto” con una muestra de 876 estudiantes universitarios de la Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense, pertenecientes a comunidades de la Costa Caribe de Nicaragua. A dichos estudiantes se les suministró un cuestionario cognitivo y una escala de actitudes hacia las matemáticas.

El análisis se desarrolló a partir de una metodología cuantitativa que incluye aspectos descriptivos de los resultados y, fundamentalmente, el análisis cualitativo de las respuestas, a través de la categorización de las mismas, poniendo especial énfasis en las capacidades observadas para la argumentación de las respuestas. Asimismo, se realizó un análisis de varianza de efectos fijos, para determinar los efectos en las variables especialidad, género y etnia. Para identificar las actitudes hacia las matemáticas se efectuó un análisis de las puntuaciones globales, un estudio de correlaciones entre los factores asociados a las matemáticas y, finalmente, un análisis de varianza y una prueba *t* para muestras independientes para describir los posibles efectos en las variables género, especialidad y etnia.

Los principales resultados muestran que las configuraciones cognitivas de objetos matemáticos que intervienen en la resolución de problemas, y los procesos asociados a dichos objetos, se relacionan con cuatro categorías: propiedades de orden de los números reales, operaciones de los números reales y sus propiedades, proposiciones y funciones proposicionales y estructura, sus tipos y propiedades. Las principales dificultades encontradas se sitúan en una familia de errores de los tipos situacional, conceptual, procedimental, combinados y sin argumentaciones, y se asocian con el uso y dominio del concepto de variable. También se han encontrado dificultades del álgebra que tiene su origen en la aritmética, errores procedimentales, dificultades debidas a la naturaleza del lenguaje algebraico dentro del contexto de las matemáticas y dificultades en el proceso de generalización. Los resultados del análisis de varianza muestran que los estudiantes de las especialidades en Contabilidad Pública, Informática Administrativa y Sociología con Mención en Autonomía son más efectivos al resolver problemas matemáticos. Recalamos que tanto hombres como

mujeres proveniente de las etnias Creole, Miskito, Mayangna y Mestizo muestran, en este estudio, la misma competencia de resolución de problemas.

En relación a las actitudes hacia las matemáticas, se puede concluir que son positivas globalmente, y que cuando los estudiantes se presentan a situaciones matemáticas se activan emociones y sentimientos como la utilidad, la confianza, el agrado y la motivación, lo que ayuda a que la ansiedad hacia las matemáticas sea menor en los procesos de resolución de problemas matemáticos. Sobre los posibles efectos en las variables especialidad, género y etnia, resaltamos que los estudiantes que provienen de las especialidades en Administración de Empresa y Contabilidad Pública y Auditoria, y que son de la etnia Creole, poseen actitudes positivas hacia las matemáticas. Destacamos que tanto hombres como mujeres tienden a poseer la misma actitud hacia las matemáticas.

Por último, el estudio permite concluir que la noción de comprensión es el hilo argumental de los procesos matemáticos (pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas y representar) y que existe una relación directa, es decir, relación, lineal, con las actitudes hacia las matemáticas, lo que se traduce en que al aumentar las actitudes hacia las matemáticas crece la recurrencia a configuraciones cognitivas de alto nivel en la resolución de problemas matemáticos por estudiantes universitarios.

ABSTRACT

In this study have analyzed the process of solving mathematical problems holding by college students. The purpose has been to explain the difficulties in solving mathematical problems in terms of the mathematical processes and attitudes towards this discipline. It is a quantitative and qualitative study supported by a design "Ex Post Facto" with a sample of 876 college students from the University of the Autonomous Regions of the Nicaraguan Caribbean Coast, from communities of the Caribbean Coast of Nicaragua. Those students were given a cognitive questionnaire and a scale of attitudes towards mathematics.

The analysis was developed from a quantitative methodology that includes descriptive aspects of the results and, most importantly, qualitative analysis of the responses, through categorizing them, with special emphasis on the observed capabilities argument responses. Also, an analysis of variance fixed effects to determine the effects on specialty variables, gender and ethnicity. To identify attitudes towards mathematics an analysis was made overall global scores, a study of correlations between factors associated with mathematics and finally, an analysis of variance and a t test for independent samples was performed to describe the possible effects on variables gender, specialty and ethnicity.

The main results show that cognitive configurations of mathematical objects involved in problem solving, and related processes such objects are related to four categories: order properties of real numbers, operations of real numbers and their properties, propositions and propositional functions and structure, their types and properties. The main difficulties are in a family of situational errors, conceptual, procedural, combined and without argument types, and are associated with the use and mastery of the concept of variable. Also was found algebra problems that originated in arithmetic, procedural errors, difficulties due to the nature of the algebraic language in the context of mathematics and difficulties in the process of generalization. The results of analysis of variance show that students of the specialties in Public Accounting, Administrative Computing and Sociology with mention in Autonomy are more effective in solving mathematical problems. We emphasize that both men and women from the Creole, Miskito, Mayangna and Mestizo ethnicities shown in this study, the same problem-solving competition.

Regarding attitudes towards mathematics, it can be concluded that are globally positive, and when students are presented in mathematical situations, emotions and feelings as utility, confidence, pleasure and motivation are activated, which helps the math anxiety is less in the process of solving mathematical problems. About the possible effects on variables specialty, gender and ethnicity we highlight that students from the specialties in Business Administration and Public Accounting and Auditing, and who are of the Creole ethnic group, have positive attitudes towards mathematics. We note that both men and women tend to have the same attitude towards mathematics.

Finally, this study allows to conclude that the notion of understanding is the plot of the mathematical processes (think and reason, argue and justify, communicate, model, formulate and solve problems and represent) and that there is a direct relationship, that is linear relationship, with attitudes towards mathematics, which means that by increasing the attitudes towards mathematics grows recurrence to cognitive configurations of high level in solving mathematical problems by undergraduate students.

AGRADECIMIENTOS

Agradecer en primer lugar a Dios, por estar conmigo en cada paso que doy y por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente.

Agradecer hoy y siempre a mi esposa, mi familia y amigos por sus consejos y entusiasmo, por su estímulo constante que me ha permitido seguir adelante a todos y todas aquellas personas que siempre han creído en mí, les deseo mis más sinceros agradecimientos.

Manifiesto mi eterno agradecimiento a la Doctora Elena Auzmendi Escribano, por su confianza en mí, por su completa dedicación y comprensión, por darme la oportunidad de realizar esta investigación por sus comentarios que han enriquecido este trabajo, por su dedicación a la investigación para culminar satisfactoriamente. Gracias Maestra.

Agradecer al Doctor Aurelio Villa, por ayudarme y facilitarme el contacto con la directora de la tesis.

Agradezco al profesorado de la Escuela de Doctorado de la UD, por su contribución en mi formación profesional, por compartir sus experiencias y conocimientos. Agradecer a la coordinación del Programa de Doctorado en Educación por sus orientaciones y contribuciones en el proceso de formación de Doctor.

Agradecer al Programa Eulalinks Lote 13 (ERASMUS MUNDUS) por la movilidad académica en la UD otorgada para el periodo octubre 2013 a mayo 2016. Agradecer al equipo de la área de proyectos internacionales de la UD, por todo el apoyo durante esta etapa.

Mi gran agradecimiento a la Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense, especialmente a la Maestra Alta Hooker Blandford, la Maestra Claribel Castillo Úbeda y el Doctor Cyril Omeir, gracias por la oportunidad otorgada para cumplir esta gran meta. Asimismo, agradecer al equipo de la DCE: José Luis Saballos, Víctor Zúñiga, Tania Rossman, Lenin Mejía, y el equipo de la DIP: Francisco Perera, Eysner García y Freddy Valiente; por su motivación, por su eterna solidaridad y amistad.

A Jorge López, Napoleón Rojas, Eugenio López, Marlon Peralta, Luis López, Tonys Romero, Sabino Olivar, Jorge Velázquez, Itihell Mejía, Darwin Salinas, Freddy Chamorro y Elebe Williams por su apoyo incondicional en esta investigación. Gracias Amigos.

Agradecer a todos y todas los estudiantes y profesores por su participación en esta investigación.

Gracias a todos y todas.

A Mike Owen Flores García

ÍNDICE DE CONTENIDO

RESUMEN	V	los objetos matemáticos	81
ABSTRACT	VII	3.3 Las nociones de objeto institucional y personal	84
AGRADECIMIENTOS	IX	3.4 La comprensión y la evaluación de los conocimientos	91
ACRÓNIMOS	XXIII	3.5 Configuraciones de objetos matemáticos y facetas duales	93
CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN	25	3.6 Los procesos metacognitivos en el enfoque ontosemiótico	102
CAPÍTULO 2: PRINCIPALES PERSPECTIVAS TEÓRICAS DE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS	30	3.7 Constructos del enfoque ontosemiótico utilizado en la resolución de problemas	103
2.1 Introducción	31	3.8 Conclusiones	111
2.2 Teoría de las situaciones didácticas	32	CAPÍTULO 4: LA ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS	112
2.3 Teoría antropológica de la didáctica de las matemáticas	35	4.1 Introducción	113
2.4 Teoría de los campos conceptuales	37	4.2 Las actitudes	114
2.5 Teoría de las funciones semiótica y los registros de representación semiótica	42	4.3 Factores que influyen en las actitudes hacia las matemáticas	117
2.6 Teorías socioculturales de la didáctica de las matemáticas	74	4.4 Problemas en la enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas	120
2.7 Conclusiones	77	4.5 Actitud hacia las matemáticas y actitudes matemáticas	124
CAPÍTULO 3: ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA	79	4.6 El modelo de Mandler en el proceso de resolución de problemas matemáticos	125
3.1 Introducción	80	4.7 Dimensiones del estado emocional en el proceso de resolución de problemas matemáticos	132
3.2 Significado institucional y personal de		4.8 Evaluación de las actitudes	136

ÍNDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO 5: EL RECONOCIMIENTO DE LA DIVERSIDAD EN LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS. 148

- 5.1 Introducción 149
- 5.2 La diversidad como una condición de existencia del ser humano 149
- 5.3 El reconocimiento de la diversidad en los sistemas educativos 150
- 5.4 La diversidad en educación matemática 154
- 5.5 La formación de profesores de matemáticas en y para la diversidad . . 161
- 5.6 Dinamización del aprendizaje en contexto de diversidad: experiencias matemáticas y didácticas para la interacción 165
- 5.7 Experiencias matemáticas y didácticas entre diversos: enriquecen el aprendizaje de las matemáticas en y para la diversidad 170
- 5.8 El diseño, gestión y evaluación para el aprendizaje de las matemáticas en y para la diversidad 173
- 5.9 Los diseños didácticos en el aprendizaje de las matemáticas en y para la diversidad 175
- 5.10 Ambientes interculturales y pluritecnológicos desarrollan el aprendizaje de las matemáticas en y para la diversidad 180
- 5.11 La evaluación en el aprendizaje de las matemáticas en y para la diversidad . . 186
- 5.12 Conclusiones 187

CAPÍTULO 6: ADAPTACIÓN Y VALIDACIÓN DE UN CUESTIONARIO SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS . . . 189

- 6.1 Introducción 190

- 6.2 La evaluación del conocimiento matemático. 191
- 6.3 Descripción del instrumento 194
- 6.4 Proceso de adaptación y validación del cuestionario 195
- 6.5 Conclusiones 208

CAPÍTULO 7: ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA FACTORIAL DE UNA ESCALA DE ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS. 210

- 7.1 Introducción 211
- 7.2 Perspectivas de la evaluación de las actitudes hacia las matemáticas . . . 212
- 7.3 Descripción del instrumento 215
- 7.4 Proceso de análisis de la estructura factorial de la escala de actitud hacia las matemáticas 217
- 7.5 Conclusiones 228

CAPÍTULO 8: METODOLOGÍA. 229

- 8.1 Introducción 230
- 8.2 Objetivos del estudio 231
- 8.3 Hipótesis 232
- 8.4 Variables 233
- 8.5 Metodología de la investigación. . . . 234
- 8.6 Muestra 235
- 8.7 Instrumentos para la recopilación de la información 237
- 8.8 Procedimiento de análisis 241
- 8.9 Enfoque ético. 242

CAPÍTULO 9: RESULTADOS. 243

- 9.1 Introducción 244

ÍNDICE DE TABLAS

9.2 Tipos de configuraciones de objetos y procesos en la resolución de problemas matemáticos y sus principales dificultades.	244	Tabla 2.1: Algunas consideraciones sobre las representaciones	52
9.3 Efecto en los niveles de complejidad de resolución de problemas matemáticos	298	Tabla 2.2: Perspectivas teóricas en didáctica de las matemáticas	77
9.4 Actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes universitarios	312	Tabla 4.1: Categorías de las actitudes cuando el objeto es la matemática . . .	124
9.5 La resolución de problemas matemáticos en términos de los procesos matemáticos y su relación con las actitudes hacia las matemáticas	339	Tabla 4.2: Principales características en el momento de construcción de una escala.	138
CAPÍTULO 10:		Tabla 4.3: Inventario de escalas de actitud y ansiedad hacia las matemáticas y la estadística	140
CONCLUSIONES	351	Tabla 4.4: Factores dimensionales de la escala de actitudes hacia las matemáticas	142
10.1 Introducción.	352	Tabla 4.5: Fiabilidad de los factores actitudinales de la escala de actitud hacia las matemáticas	143
10.2 Conclusiones generales.	352	Tabla 5.1: Lo biológico y cultural: vertientes de la diversidad humana	150
10.3 Aportaciones, limitaciones y perspectivas futuras	390	Tabla 5.2: Normas y políticas educativas para poblaciones diversas de Nicaragua	152
10.4 Publicaciones derivadas de la tesis doctoral.	400	Tabla 5.3: Ejemplo de tablillas de Plimpton .	168
REFERENCIAS	401	Tabla 5.4: Ejemplo del conocimiento especializado del contenido	172
ANEXOS.	425	Tabla 5.5: Ejemplo del conocimiento del contenido y de los estudiantes	172
Anexo 1. Cuestionario Cognitivo	425	Tabla 5.6: Principios que privilegian la interacción y la construcción compartida de saberes	177
Anexo 2. Escala de Actitud hacia las Matemáticas.	432	Tabla 5.7: Enfoques en la formación con el uso de las TIC	182
Anexo 3. Distribución del cuestionario cognitivo en los niveles de complejidad	434	Tabla 6.1: Descriptores del proceso de matematización	192
Anexo 4. Descripción de los procesos matemáticos en el cuestionario cognitivo	439	Tabla 6.2: Contenido evaluado en el cuestionario cognitivo	194

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 6.3: Distribución de la muestra por especialidad en la adaptación del cuestionario cognitivo	196	Tabla 7.6: Índice de discriminación o homogeneidad de la escala de actitud hacia las matemáticas	220
Tabla 6.4: Proporciones de acierto en la adaptación del cuestionario cognitivo .	196	Tabla 7.7: Índice de fiabilidad de la escala de actitud hacia las matemáticas	221
Tabla 6.5: Índice de homogeneidad en el proceso de adaptación cuestionario cognitivo	198	Tabla 7.8: Análisis factorial de la escala de actitud hacia las matemáticas.	222
Tabla 6.6: Relación entre el contenido evaluado y los procesos matemáticos .	200	Tabla 7.9: Solución factorial rotada	222
Tabla 6.7: Resumen estadístico del análisis factorial del cuestionario cognitivo . .	203	Tabla 7.10: Correlaciones entre los factores de la escala de actitud hacia las matemáticas	223
Tabla 6.8: Resumen factorial de los niveles de complejidad	203	Tabla 7.11: Media entre los factores actitudinales	224
Tabla 6.9: Relación entre niveles de resolución de problemas matemáticos y los procesos matemáticos	204	Tabla 7.12: Estadísticos descriptivos entre género en la escala de actitud hacia las matemáticas	227
Tabla 6.10: Solución factorial rotada	204	Tabla 7.13: Prueba T para muestras independientes en la escala de actitud hacia las matemáticas	227
Tabla 6.11: Medias por mínimos cuadrado en la puntuación total del cuestionario cognitivo	207	Tabla 8.1: Tipos de variables en la investigación.	233
Tabla 6.12: Análisis de varianza para la puntuación total del cuestionario cognitivo	207	Tabla 8.2: Distribución de la muestra de la investigación por especialidad	236
Tabla 6.13: Prueba T para muestra independientes en la puntuación total del cuestionario cognitivo	208	Tabla 8.3: Distribución de la muestra de la investigación especialidad y grupo étnico	236
Tabla 7.1: Clasificación de las escalas . . .	211	Tabla 8.4: Fiabilidad del cuestionario cognitivo con la muestra de la investigación.	238
Tabla 7.2: Factores e ítems de la escala de actitud hacia las matemáticas en la validación	216	Tabla 8.5: Fiabilidad de la escala de actitud hacia las matemáticas con la muestra de la investigación	239
Tabla 7.3: Criterios de corrección de los ítems de la escala de actitud hacia las matemáticas	217	Tabla 8.6: Fiabilidad de los factores actitudinales con la muestra de la investigación.	241
Tabla 7.4: Distribución por especialidad en la adaptación de la escala	218	Tabla 9.1: Codificación según las familias de errores del cuestionario cognitivo. .	245
Tabla 7.5: Estadísticos descriptivos de la escala de actitud hacia las matemáticas	218	Tabla 9.2: Frecuencias y porcentaje de respuesta en el ítem 1 del cuestionario cognitivo	246

Tabla 9.3: Configuración cognitiva asociada al ítem 1 del cuestionario cognitivo	247	respuesta del ítem 14 del cuestionario cognitivo	264
Tabla 9.4: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 1 del cuestionario cognitivo	248	Tabla 9.18: Configuración cognitiva asociada al ítem 14 del cuestionario cognitivo	265
Tabla 9.5: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 2 del cuestionario cognitivo	249	Tabla 9.19: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 14 del cuestionario cognitivo	266
Tabla 9.7: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 2 del cuestionario cognitivo	252	Tabla 9.20: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 17 del cuestionario cognitivo	268
Tabla 9.8: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 3 del cuestionario cognitivo	253	Tabla 9.21: Configuración cognitiva asociada al ítem 17 del cuestionario cognitivo	269
Tabla 9.9: Configuración cognitiva asociada al ítem 3 del cuestionario cognitivo	254	Tabla 9.22: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 17 del cuestionario cognitivo	270
Tabla 9.10: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 3 del cuestionario cognitivo	256	Tabla 9.23: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 18 del cuestionario cognitivo	271
Tabla 9.11: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 8 del cuestionario cognitivo	257	Tabla 9.24: Configuración cognitiva asociada al ítem 18 del cuestionario cognitivo	272
Tabla 9.12: Configuración cognitiva asociada al ítem 8 del cuestionario cognitivo	257	Tabla 9.25: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 18 del cuestionario cognitivo	273
Tabla 9.13: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 8 del cuestionario cognitivo	259	Tabla 9.26: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 22 del cuestionario cognitivo	275
Tabla 9.14: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 10 del cuestionario cognitivo	260	Tabla 9.27: Configuración cognitiva asociada al ítem 22 del cuestionario cognitivo	276
Tabla 9.15: Configuración cognitiva asociada al ítem 10 del cuestionario cognitivo	261	Tabla 9.28: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 22 del cuestionario cognitivo	277
Tabla 9.16: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 10 del cuestionario cognitivo	263	Tabla 9.29: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 24 del cuestionario cognitivo	278
Tabla 9.17: Frecuencias y porcentaje de		Tabla 9.30: Configuración cognitiva asociada al ítem 24 del cuestionario cognitivo	279

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 9.31: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 24 del cuestionario cognitivo	281	Tabla 9.45: Estructuras, sus tipos y propiedades	296
Tabla 9.32: Frecuencia y porcentaje de respuesta del ítem 25 del cuestionario cognitivo	283	Tabla 9.46: Procesos matemáticos y su relación con los objetos matemáticos	297
Tabla 9.33: Configuración cognitiva asociada al ítem 25 del cuestionario cognitivo	283	Tabla 9.47: Distribución global de la familia de errores	298
Tabla 9.34: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 25 del cuestionario cognitivo	285	Tabla 9.48: Medias por mínimos cuadrados para el nivel 1 con intervalos de confianza del 95%	299
Tabla 9.35: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 26 del cuestionario cognitivo	286	Tabla 9.49: Análisis de varianza para el primer nivel de complejidad	300
Tabla 9.36: Configuración cognitiva asociada al ítem 26 del cuestionario cognitivo	286	Tabla 9.50: Medias por mínimos cuadrados para el nivel 2 con intervalos de confianza del 95%	302
Tabla 9.37: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 26 del cuestionario cognitivo	288	Tabla 9.51: Análisis de varianza para el segundo nivel de complejidad	303
Tabla 9.38: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 28 del cuestionario cognitivo	289	Tabla 9.52: Medias por mínimos cuadrados para el nivel 3 con intervalos de confianza del 95%	304
Tabla 9.39: Configuración cognitiva asociada al ítem 28 del cuestionario cognitivo	290	Tabla 9.53: Análisis de varianza para el tercer nivel de complejidad	305
Tabla 9.40: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 26 del cuestionario cognitivo	292	Figura 9.10: Tendencias por especialidad en el Nivel 3	305
Tabla 9.41: Distribución de las configuraciones cognitivas del cuestionario cognitivo	293	Tabla 9.54: Medias por mínimos cuadrados para el nivel 4 con intervalos de confianza del 95%	306
Tabla 9.42: Propiedades de orden de los números reales	294	Tabla 9.55: Análisis de varianza para el cuarto nivel de complejidad	307
Tabla 9.43: Operaciones de los números reales y sus propiedades.	295	Tabla 9.56: Medias por mínimos cuadrados para el nivel 5 con intervalos de confianza del 95%	308
Tabla 9.44: Propositiones y funciones proposicionales	296	Tabla 9.57: Análisis de varianza para el quinto nivel de complejidad	309
		Tabla 9.58: Medias por mínimos cuadrados para el nivel 6 con intervalos de confianza del 95%	310
		Tabla 9.59: Análisis de varianza para el sexto nivel de complejidad	311

Tabla 9.60: Resumen estadísticos de la escala de actitud hacia las matemáticas	313	Tabla 9.74: Medias por mínimos cuadrados para confianza con intervalos de confianza del 95%	333
Tabla 9.61: Correlación entre los factores actitudinales hacia las matemáticas . . .	314	Tabla 9.75: Análisis de varianza en confianza hacia las matemáticas	334
Tabla 9.62: Medias por mínimos cuadrados para ansiedad con intervalos de confianza del 95%	319	Tabla 9.76: Prueba T para muestra independientes en la dimensión confianza con respecto a la etnia	335
Tabla 9.63: Análisis de varianza en ansiedad hacia las matemáticas	320	Tabla 9.77: Prueba T para muestra independientes el factor confianza con respecto al género	337
Tabla 9.64: Prueba T para muestra independientes en el factor ansiedad con respecto a género	322	Tabla 9.78: Descripciones resumidas del proceso pensar y razonar	342
Tabla 9.65: Medias por mínimos cuadrados para utilidad con intervalos de confianza del 95%	323	Tabla 9.79: Descripciones resumidas del proceso de argumentar y justificar . . .	343
Tabla 9.66: Análisis de varianza en utilidad hacia las matemáticas	324	Tabla 9.80: Descripciones resumidas del proceso de comunicar	343
Tabla 9.67: Prueba T para muestra independientes en el factor utilidad con respecto a género	326	Tabla 9.81: Descripciones resumidas del proceso de modelar.	344
Tabla 9.68: Medias por mínimos cuadrados para agrado con intervalos de confianza del 95%	326	Tabla 9.82: Descripciones resumidas del proceso de plantear y resolver problemas	345
Tabla 9.69: Análisis de varianza en agrado hacia las matemáticas	327	Tabla 9.83: Descripciones resumidas del proceso de representar	346
Tabla 9.70: Prueba T para muestra independientes en el factor agrado con respecto a género	329	Tabla 9.84: Relaciones entre la comprensión y los factores actitudinales	348
Tabla 9.71: Medias por mínimos cuadrados para motivación con intervalos de confianza del 95%	330	Tabla 10.1: Configuraciones cognitivas asociadas a cada ítems analizado . . .	353
Tabla 9.72: Análisis de varianza en motivación hacia las matemáticas . . .	331	Tabla 10.2: Distribución global del tipo error	361
Tabla 9.73: Prueba T para muestra independientes en el factor motivación con respecto a género	333	Tabla 10.3: Errores más significativos en los ítems analizados.	362
		Tabla 10.4: Prueba de normalidad Kolmogorov-Smirnov en las configuraciones cognitivas	368

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 10.5: Estadísticos de las muestras relacionadas en las configuraciones cognitivas	368
Tabla 10.6: Prueba de muestras relacionadas en las configuraciones cognitivas	369
Tabla 10.7: Diferencias entre configuraciones cognitivas de alto nivel y bajo nivel	369
Tabla 10.8: Diferencias en las configuraciones cognitivas	370
Tabla 10.9: Análisis de varianza en la puntuación total de la prueba	374
Tabla 10.10: Resultados de la prueba HSD de Tukey en las especialidades	374
Tabla 10.11: Resultados de la prueba de HSD de Tukey en las etnias	379
Tabla 10.12: Análisis de varianza en la puntuación total de la escala de actitud hacia las matemáticas.	382
Tabla 10.13: Resultados de la prueba de HSD de Tukey en las especialidades	383
Tabla 10.14: Resultados de la prueba de HSD de Tukey en las etnias	387
Tabla 10.15: Descriptores que caracterizan los distintos procesos matemáticos	392

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Sistema semiótico cultural	43
Figura 2.2: Dual del sistema semiótico cultural	44
Figura 2.3: Signo triádico de Pierce	46
Figura 2.4: El signo en términos de vectores	47
Figura 2.5: Esquema de registro de representación	55
Figura 2.6: Registro de representación de ejemplo y contraejemplo	59
Figura 2.7: Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas	70
Figura 3.1: Emergencia de un objeto	86
Figura 3.2: Tipos de significados institucionales y personales	91
Figura 3.3: Facetas y niveles de análisis didáctico	93
Figura 3.4: Constructo de configuración epistémica y cognitiva	97
Figura 3.5: Herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico	99
Figura 3.6: Objetos y procesos matemáticos según el enfoque ontosemiótico	101
Figura 3.7: Práctica de resolución de problemas matemáticos RP	104
Figura 3.8: Configuración epistémica-cognitiva asociada a la resolución de problemas RP	105
Figura 3.9: Análisis de una argumentación por medio de elementos genéricos	109
Figura 4.1: Componentes de la actitud y sus relaciones	116
Figura 4.2: Elementos psicoeducativos	118
Figura 4.3: Modelo de Mandler.	126
Figura 4.4: Síntesis del modelo de Mandler	129

Figura 4.5: Dimensiones del estado emocional en la resolución de problemas	132	Figura 7.5: Tendencias del factor confianza por especialidad.	226
Figura 4.6: Relación de los factores dimensionales con la resolución de problemas	146	Figura 9.1: Porcentajes de respuestas de los ítems que constituyen el primer nivel de complejidad	246
Figura 5.1: Valores positivos y negativos del concepto de diversidad	151	Tabla 9.6: Configuración cognitiva asociada al ítem 2 del cuestionario cognitivo	251
Figura 5.2: Relaciones fundamentales de orden didáctico y pedagógico	153	Figura 9.2: Porcentajes de respuestas de los ítems que constituyen el segundo nivel de complejidad	260
Figura 5.3: Didácticas específicas al interior de la didáctica de las matemáticas	157	Figura 9.3: Porcentajes de respuestas de los ítems que constituyen el tercer nivel de complejidad	267
Figura 5.4: Relación entre didáctica con el uso de la tecnología.	159	Figura 9.4: Porcentajes de respuestas de los ítems que constituyen el cuarto nivel de complejidad	274
Figura 5.5: Conocimiento didáctico-pedagógico del profesor	163	Figura 9.5: Porcentajes de respuestas de los ítems que constituyen el quinto nivel de complejidad	282
Figura 5.6: Componentes para la incorporación en el aprendizaje de las matemáticas	166	Figura 9.6: Porcentajes de respuestas de los ítems que constituyen el sexto nivel de complejidad	289
Figura 5.7: Tejido didáctico que forman las macro estructuras didácticas	175	Figura 9.7: Tendencias por especialidad en el Nivel 1	300
Figura 6.1: Categoría de dificultad de los ítems del cuestionario	197	Figura 9.8: Tendencias por etnia en el Nivel 1	301
Figura 6.2: Distribución del índice de dificultad de los ítems del cuestionario	197	Figura 9.9: Tendencias por especialidad en el Nivel 2	303
Figura 6.3: Índice de discriminación del cuestionario	199	Figura 9.11: Tendencias por especialidad en el Nivel 4	307
Figura 7.1: Tendencias del factor agrado por especialidad.	224	Figura 9.12: Tendencias por especialidad en el Nivel 5	309
Figura 7.2: Tendencias del factor utilidad por especialidad.	225	Figura 9.13: Tendencias por especialidad en el Nivel 6	311
Figura 7.3: Tendencias del factor ansiedad por especialidad.	225	Figura 9.14: Distribución de la puntuación de los factores asociados a las matemáticas	313
Figura 7.4: Tendencias del factor motivación por especialidad.	226		

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 9.15: Relación entre agrado y utilidad	315	Figura 9.30: La motivación hacia las matemáticas en las especialidades. . .	331
Figura 9.16: Relación entre utilidad y confianza	315	Figura 9.31: La motivación hacia las matemáticas en las etnias	332
Figura 9.17: Relación entre agrado y ansiedad	316	Figura 9.32: La motivación de las matemáticas en el género	332
Figura 9.18: Relación entre utilidad y ansiedad	316	Figura 9.33: La confianza hacia las matemáticas en las especialidades. . .	335
Figura 9.19: Relación entre motivación y ansiedad.	317	Figura 9.34: La confianza hacia las matemáticas en las etnias	336
Figura 9.20: Relación de confianza y ansiedad	318	Figura 9.35: La confianza hacia las matemáticas en el género	337
Figura 9.21: La ansiedad hacia las matemáticas en las especialidades. . .	321	Figura 9.36: Promedio alcanzados en los niveles de complejidad de resolución de problemas	340
Figura 9.22: La ansiedad hacia las matemáticas en las etnias	321	Figura 9.37: Procesos matemáticos en los niveles de complejidad de resolución de problemas	341
Figura 9.23: La ansiedad hacia las matemáticas en el género	322	Figura 9.38: Relación entre el nivel comprensión y las actitudes hacia las matemáticas	347
Figura 9.24: La utilidad hacia las matemáticas en las especialidades. . .	324	Figura 10.1: Modelo de análisis en los procesos de resolución de problemas .	390
Figura 9.25: La utilidad hacia las matemáticas en las etnias	325	Figura 10.2: Tipos de objetos implicados en la resolución de problemas matemáticos	391
Figura 9.26: La utilidad hacia las matemáticas en el género	325	Figura 10.3: Factores actitudinales asociados a las matemáticas	394
Figura 9.27: El agrado hacia las matemáticas en las especialidades. . .	328	Figura 10.4: Modelo para la enseñanza de las matemáticas en la universidad . . .	396
Figura 9.28: El agrado hacia las matemáticas en las etnias	328		
Figura 9.29: El agrado hacia las matemáticas en género	329		

ACRÓNIMOS

EOS	Enfoque Ontológico y Semiótico
CAC	Comunidad Alternativa de Ciencias
CALE	Comunidad Alternativa de Lenguaje y Educación
CAM	Comunidad Alternativa de Matemáticas
INCI	Instituto Nacional para Ciegos
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
OECD	Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico
TIMSS	Trends in International Mathematics and Science Study
PISA	Programme for International Student Assessment
TIC	Tecnología de la Información y Comunicación
UNESCO	United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization
UD	Universidad de Deusto
URACCAN	Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense

CAPÍTULO 1:

INTRODUCCIÓN

Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto a tu curiosidad y trae a juego tus facultades inventivas, y si lo resuelves por tus propios métodos, puedes experimentar la tensión y disfrutar del triunfo del descubrimiento (Polya, 1965).

En esta tesis doctoral abordamos problemas característicos de la investigación en didáctica de la matemática, entendida como disciplina tecno-científica (Godino, 2010), sobre un proceso matemático básico e instrumental como es la resolución de problemas, aplicando la perspectiva holística que proporciona el enfoque ontológico y semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero & Font, 2006; Godino, 2012). Nos concentramos particularmente en la resolución de problemas matemáticos en el contexto algebraico. Comprendiendo que la resolución de problemas ha sido objeto de numerosas investigaciones en didáctica de las matemáticas (Poincaré, 1963; Polya, 1965; Schoenfeld, 1985; Rico, 1988; Carrillo, 1995; Puig, 1996; NCTM, 2000; Socas, 2001; Niss, 2002; TIMSS, 2003; Silbey, 2003; OECD, 2005; Alsina, 2004; Tobón, 2007; Goñi, 2008; Caballero, Guerrero, Blanco & Piedehierro, 2009; Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez & Escorial, 2012).

Teniendo en cuenta que “los problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas hay que considerarlos dentro de un amplio contexto” (Jimeno-Pérez, 2002, p. 581). Y que los estudiantes tienen unos determinados antecedentes socioculturales, una percepción de futuro; están inmersos en una sociedad particular, una cultura que tiene sus creencias particulares sobre las matemáticas y su importancia dentro de la educación; los aprendizajes se realizan dentro de un contexto universitario, con sus reglas y sus prioridades a través de unos profesores que tienen ideas sobre la matemática y la forma de enseñarlas.

En este sentido, la motivación por el estudio de los procesos de resolución de problemas matemáticos por estudiantes universitarios, radica en el alto porcentaje de estudiantes nicaragüenses que acceden a estudios universitarios con carencias en sus habilidades matemáticas, desfavoreciendo el aprendizaje de algunas de las nuevas materias en la universidad y el abordar con éxito la resolución de problemas. Parte de la motivación de nuestro estudio tiene fundamento en la línea siguiente: “las dificultades son interrogantes a las hay que darle respuesta, estímulo para diseñar estrategias de superación, retos para reflexionar y entender las distintas variables que intervienen en aquellos procesos cuyo control parece que se nos escapa” (Rico, 2000, p. 8). Como educadores preocupados por el mejoramiento de la calidad de la educación, nos motiva el estudio de este tema, apoyando así el desarrollo de futuros trabajos de investigación.

Por otra parte, destaco mi motivación personal, por profundizar en mi comprensión de las dificultades que se encuentran los estudiantes en este ámbito del conocimiento. El permanecer trabajando como profesor de la Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense, me dio la oportunidad de observar la gama de dificultades que confrontan los estudiantes universitarios cuando ingresan a la universidad, así como su posterior ampliación de sus estudios en las diferentes asignaturas de matemáticas.

Por lo tanto, el objetivo principal de nuestra investigación se centra en analizar los procesos de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes universitarios. Con dicho fin ha sido necesario, en primer lugar, determinar los tipos de configuraciones de objetos y procesos que utilizan los estudiantes universitarios, en segundo lugar, detectar las principales dificultades manifestadas por los estudiantes universitarios ante la resolución de problemas matemáticos, en tercer lugar, identificar las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes universitarios, en cuarto lugar, estudiar si existen diferencias significativas entre especialidad, género y etnia en relación con los niveles de resolución de problemas matemáticos y las actitudes hacia las matemáticas, y finalmente, explicar las dificultades detectadas en la resolución de problemas matemáticos en términos de los procesos matemáticos y las actitudes hacia las matemáticas. Como afirma Stake (1994), se analiza la situación vital en la que los sujetos han experimentado el fenómeno que se quiere investigar y después de estudiar las semejanzas y diferencias que hay entre dos situaciones, entonces podrán describirse los factores que parecen explicar la presencia del fenómeno en una situación y su ausencia en la otra.

La orientación de nuestro trabajo es de índole cognitivo, en el sentido de que pretendemos analizar conocimientos, formas de razonar, habilidades de pensamientos, creencias, sentimientos y emociones de los estudiantes. Considerando la diversidad de planteamientos y de nociones cognitivas usadas en las investigaciones, así como la finalidad educativa de nuestro estudio, hemos optado por utilizar una metodología de la investigación integrada por los paradigmas cuantitativos y cualitativos, y sustentada en un diseño “Ex Post Facto” aplicando dos instrumentos de medidas que han permitido describir los objetos matemáticos (lenguaje, conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos y situación-problema), procesos matemáticos (pensar-razonar, argumentar y justificar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, y representar) que los estudiantes usan al tratar de resolver problemas, además de comprender los conflictos que manifiestan y su relación con las actitudes hacia las matemáticas.

En este sentido, hemos organizado la memoria en 5 apartados: Introducción, Marco Teórico, Metodología, Resultados y Conclusiones. El primer apartado Introducción, está constituido por el Capítulo 1: Introducción. Se presenta la tesis, se explican las causas y motivación de elección del tema, y se justifica la metodología de investigación, al final se detalla cómo está constituida la investigación.

El segundo apartado Marco Teórico está organizado por seis capítulos, inicia con el Capítulo 2: Principales Perspectivas Teóricas en la Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Se describe el estado de la cuestión de las principales teorías en la investigación en didáctica de las matemáticas, en particular, la teoría de las situaciones didácticas, la

teoría antropológica, la teoría de los campos conceptuales, teoría semiótica y los registros de representación semiótica, y la teoría sociocultural de la didáctica de las matemáticas.

El Capítulo 3: Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Se detallan, de manera breve, algunos de los constructos del enfoque ontosemiótico: significado institucional y personal de los objetos matemáticos; las nociones de objetos institucional y personal; la comprensión y evaluación de los conocimientos; la configuración de objetos matemáticos y facetas duales; los procesos metacognitivos en el enfoque ontosemiótico; y los constructos del enfoque ontosemiótico utilizados en la resolución de problemas.

El Capítulo 4: La Actitud hacia las Matemáticas. Se abordan aspectos específicos sobre las actitudes, sus componentes, características e importancia. Se hace una aproximación a los problemas en la enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas. Asimismo, se menciona el modelo de Mandler y las dimensiones del estado emocional en los procesos de resolución de problemas matemáticos. Al final del capítulo, se puntualiza en los modelos de evaluación de las actitudes hacia las matemáticas.

El Capítulo 5: El Reconocimiento de la Diversidad en la Didáctica de las Matemáticas. Se especifican algunos aspectos sobre el reconocimiento de la diversidad en la didáctica de las matemáticas: la diversidad como una condición de existencia humana; el reconocimiento de la diversidad en los sistemas educativos; la diversidad en educación matemática; la formación de profesores de matemática en y para la diversidad; y dinamización del aprendizaje en contexto de diversidad: experiencias matemáticas y didácticas para la interacción; experiencias matemáticas y didácticas entre diversos: enriquecen el aprendizaje de las matemáticas en y para la diversidad; experiencias para el diseño, gestión y evaluación para el aprendizaje de las matemáticas en un contexto de diversidad; los diseños didácticos en el aprendizaje de las matemáticas en y para la diversidad; ambientes

interculturales y pluritecnológicos desarrollan el aprendizaje de las matemáticas en y para diversidad; la evaluación en el aprendizaje de las matemáticas en y para la diversidad.

El Capítulo 6: Adaptación y Validación de un Cuestionario sobre Resolución de Problemas Matemáticos. Se detallan, aspectos sobre la evaluación del conocimiento matemático; la descripción del instrumento; y el proceso de adaptación y validación del instrumento de medida.

El Capítulo 7: Análisis de la Estructura Factorial de una Escala de Actitud hacia las Matemáticas. Se presentan aspectos sobre la perspectiva de la evaluación de las actitudes hacia las matemáticas, la descripción del instrumento y el proceso de análisis de la estructura factorial de una escala de actitud hacia las matemáticas.

El apartado de Metodología, constituido en el Capítulo 8: Metodología. Se describen los objetivos de la investigación; la hipótesis de la misma; las variables de estudio; la metodología diseñada para realizar la investigación; las características de la muestra; los instrumentos utilizados; procedimientos de análisis; y enfoque ético.

El apartado de Resultados, establecido en el Capítulo 9: Resultados. Se detallan los principales resultados de la investigación, puntualizándose en describir los tipos de objetos y procesos en la resolución de problemas matemáticos, las principales dificultades en el proceso de resolución de problemas, las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes universitarios y la relación de los procesos matemáticos con el papel afectivo hacia las matemáticas.

El apartado de Conclusiones, instaurado en el Capítulo 10: Conclusiones. Se presenta una síntesis de los resultados obtenidos en la investigación llevada a cabo, exponiendo y analizando, a su vez, las conclusiones que derivan de la misma.

CAPÍTULO 2:

PRINCIPALES PERSPECTIVAS TEÓRICAS DE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Bertrand Russell definió “la matemática como la ciencia en la que nunca sabemos sobre lo que estamos hablando ni si lo que decimos es verdadero. Se ha mostrado que la matemática es ampliamente aplicable en muchos otros campos científicos. Por tanto, la mayoría de los científicos no saben de lo que están hablando ni si lo que dicen es verdad” (Russell, 1903, p. 25).

2.1 INTRODUCCIÓN

Las teorías del pensamiento, de la enseñanza y del aprendizaje se basan en una filosofía que subyace a la del conocimiento. La educación matemática se encuentra en el nexo de dos campos de investigación: el saber de las matemáticas y el saber de la educación. En la medida en que muchas otras disciplinas confluyen e interactúan con estos dos campos, el progreso en las teorías que definen la educación matemática se vuelve más compleja (Sriraman, 2009). Estas teorías se ocupan de la situación actual y de las perspectivas para el desarrollo futuro de la educación matemática, como un campo académico y como un dominio de interacción entre la investigación, el desarrollo y la práctica (Steiner & Balacheff, 1984).

Las teorías de la educación matemática se distinguen en tres componentes interrelacionados:

- La identificación y formulación de los problemas básicos en la orientación, fundamento, metodología y organización de la educación matemática como una disciplina.
- El desarrollo de una aproximación comprensiva a la educación matemática, que debe ser vista, en su totalidad, como un sistema interactivo que comprende investigación, desarrollo y práctica. Esto lleva a destacar la importancia de la teoría de sistemas, especialmente de las teorías de los sistemas sociales, basadas en conceptos como interacción social, actividad cooperativa humana, diferenciación, subsistemas, auto-reproducción y sistemas autoorganizados, autoreferencia y reflexión en sistemas sociales (Steiner & Balacheff, 1984). Así mismo, interesa la identificación y el estudio de las múltiples interdependencias y mutuos condicionantes en la educación matemática, incluyendo el análisis de las complementariedades fundamentales.
- La organización de la investigación sobre la propia educación matemática como disciplina que, por una parte, proporcione información y datos sobre la situación, los problemas y las necesidades de la misma, teniendo en cuenta las diferencias nacionales y regionales; y, por otra, contribuya al desarrollo de un metaconocimiento y una actitud autoreflexiva como base para el establecimiento y realización de los programas de desarrollo de las teorías de la educación matemática.

Además, las teorías de la educación matemática se han centrado en el papel de la teoría y la teorización, y la mayoría de sus contribuciones han destacado en la rama de la Didáctica de las Matemáticas entendida ésta como disciplina científica (Steiner & Vermandel, 1988).

Se debe agregar que la investigación en educación matemática tiene como propósito comprender la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje, es decir, usar esa comprensión para mejorar la instrucción matemática. Dicho de otra manera, se asume que, sin una profunda comprensión del pensamiento, la enseñanza, y el aprendizaje, no es posible ningún progreso consistente en el frente aplicado (Schoenfeld, 2001). En este sentido, existe una comunidad de investigadores que han producido teorías sobre la educación matemática.

Por tanto, en este capítulo, se describirá el estado de la cuestión de estas teorías, centrándonos en la actividad desarrollada por los grandes núcleos de investigadores, en particular, los grupos de la teoría de las situaciones didácticas, teoría antropológica de la didáctica de las matemáticas, teoría de los campos conceptuales de la didáctica de las matemáticas, teoría semiótica y registros de representación semiótica de la didáctica de las matemáticas y teorías socioculturales de la didáctica de las matemáticas.

2.2 TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

Los procesos psicológicos de un individuo ideal (sujeto epistémico) que tienen lugar en las transiciones de un objeto (concepto o procedimiento) matemático a otro fueron estudiados por Piaget. Los conceptos de asimilación y acomodación son esenciales para la teoría de las situaciones didácticas. La didáctica fundamental estudia las evoluciones de un individuo al gestionar un saber matemático concreto en un medio específico, de forma que estas evoluciones son irreducibles al comportamiento psicológico del sujeto (Font, 2002). Tal como señala Brousseau (1998):

La concepción moderna de la enseñanza va a pedir al maestro que provoque en los estudiantes las adaptaciones deseadas, mediante una elección juiciosa de los problemas que le propone [...]. Tal situación la llamamos situación didáctica. Cada conocimiento se puede caracterizar por una (o varias) situaciones didácticas que preserva su sentido y que llamaremos situación fundamental (p. 59).

La necesidad de modelización del saber matemático a enseñar ha sido puesta de manifiesto por la didáctica fundamental (Ruiz, Estepa, & García, 2007). En el caso de la teoría de las situaciones didácticas que aquí concierne, utiliza como instrumento de modelización el juego. Las relaciones que se generan de los modelos de la realidad didáctica y el juego formal por sí solas no pueden explicar todo el funcionamiento didáctico. De hecho, para la teoría de las situaciones didácticas, la necesidad de introducir un medio en el juego

didáctico del estudiante responde a una necesidad interna del sistema y no es el fruto de una reconstrucción del sistema, ni de ninguna observación (Brousseau, 1998). Dicho de otra manera, “el medio se muestra dotado de una objetividad que escapa al control y a la intención de una institución” (Chevallard, 1999, p. 216). Aún más, se defiende que todo conocimiento está íntimamente relacionado a una o unas situaciones, de manera que se describe un conocimiento en términos de una situación.

Según Brousseau (1998), el saber a enseñar tiene una existencia cultural, preexistente y, en cierta forma, independiente de las personas e instituciones interesadas en su construcción y comunicación. El objetivo fundamental de la didáctica es el análisis de los procesos de comunicación y reconstrucción de dichos saberes por el sujeto en el seno de los sistemas didácticos (Ruiz, Estepa, & García, 2007). La transposición didáctica da cuenta de las adaptaciones de estos saberes para su estudio en el contexto escolar. En este sentido, parece claro que el saber matemático se refiere a una forma especial de conocimiento institucionalizado, que habitualmente se registra de forma axiomática y queda despersonalizado y descontextualizado (Font, 2002). Este saber cuyo contexto existe ya, no es una producción directa del maestro, sino que se trata de un objeto cultural, citado o recitado (Brousseau, 1986).

Asimismo, Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi (2007), piensan que el saber matemático puede calificarse de absoluto. Es decir, se apunta a que existe un saber erudito que está ahí (sin negar su carácter histórico y evolutivo), cuya apropiación por parte de los estudiantes es el compromiso de la enseñanza. Para Brousseau (1986), la distinción entre un saber y un conocimiento se debe, en primer lugar, a su estado cultural; un saber es un conocimiento institucionalizado. El paso de un estado al otro implica, por ende, transformaciones que los diferencia y que se explican en parte por las relaciones didácticas que se establecen. La distinción entre saber y conocimiento es central en la teoría de las situaciones didácticas y Brousseau (1986) lo plantea de la siguiente forma:

“Las actividades sociales y culturales que condicionan la creación, el ejercicio y la comunicación del saber y los conocimientos [...] El saber es una asociación entre buenas preguntas y buenas respuestas. El profesor plantea un problema que el estudiante debe resolver, si el estudiante responde, muestra así, que sabe; si no, se manifiesta una necesidad de saber que pide información, una enseñanza” (Brousseau, 1986, p. 38).

Brousseau (1998) utiliza el término ‘saber’ ligado con el calificativo de ‘saber formal’, ‘saber erudito’, ‘saber teórico’, ‘saber práctico’, lo que indica que se interpreta como algo externo o institucional, como elemento de referencia de la enseñanza y del aprendizaje. En

esta línea, cabe destacar la idea desarrollada por Chevallard (1999) de una relación estrecha con la distinción saber-teórico, saber-práctico. Ya que Brousseau (1998) considera una primera descomposición del saber que podría relacionarse con las praxis y el logos con lo procedimental y lo conceptual.

En cuanto a las nociones usadas en la teoría de las situaciones didácticas para referirse al conocimiento del sujeto, encontramos el uso de la ‘representación’ en el sentido de representación interna; en otras ocasiones utiliza la expresión ‘modelos implícitos’ para dichos conocimientos y representaciones (Wilhelmi, Font, & Godino, 2005). Esta teoría interpreta los modelos implícitos como formas de conocimiento que no funcionan de manera completamente independiente, ni de manera completamente integrada, para controlar las interacciones del sujeto (Font, 2002). El estudio de las relaciones que se establecen entre estos tipos de controles en la actividad del sujeto y el papel que juegan en las adquisiciones es un sector de la psicología, esencial para la didáctica, estudio al que la didáctica pretende, por otra parte, contribuir (Brousseau, 1998).

Para Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2007), la noción de modelo es nuclear para describir los procedimientos de cálculo, los resultados de la formulación y los conocimientos puestos en juegos por los estudiantes enfrentados a una situación dada. Cabría adelantar que los autores distinguen entre tres modelos diferentes, que así se definen:

- Modelo de acción: procedimientos de cálculo que produce una estrategia (válida para todos los casos) o una táctica (específica para algunos casos concretos).
- Modelo explícito: resultado de una situación de formulación y que puede ser formulada mediante signos y reglas, conocidos o nuevos.
- Modelo implícito: representación simplificada de un conocimiento, suficiente para caracterizar los comportamientos observados en una situación dada.

Por otra parte, cabe resaltar que la teoría de las situaciones didácticas utiliza aportaciones de la psicología para estudiar los procesos de construcción de los conocimientos por parte del sujeto. Los conocimientos evolucionan según procesos complejos. Querer explicar esas evoluciones únicamente por las interacciones efectivas con el medio sería ciertamente un error. Prueba de ello es el hecho de que los niños pueden interiorizar las situaciones que les interesen y operar con sus ‘representaciones internas’ que consisten en experiencias mentales muy importantes (Wilhelmi, Font, & Godino, 2005). La teoría de las situaciones didácticas resuelve así los problemas de asimilación (aumento de esquemas ya adquiridos por agregación de hechos nuevos) o de acomodación (reorganización de esquemas para aprender preguntas nuevas o para resolver contradicciones). En este contexto, la interiorización de estas interacciones no cambia mucho la naturaleza: el diálogo con un

oponente ‘interior’ es ciertamente menos vivificante que un verdadero diálogo, pero es un diálogo (Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2007).

Brousseau (1986) introduce el término de concepción de manera equivalente al de conocimiento del alumno. Es decir, insiste sobre el carácter dialéctico de las concepciones de los alumnos, y los problemas que el medio les propone conducen a nuevas concepciones y a nuevas preguntas cuyo sentido es fundamentalmente local. En Antibí y Brousseau (2000) se indica, que “una de las hipótesis fuertes de la teoría de las situaciones didácticas y de la teoría de los campos conceptuales es la que postula la existencia de las concepciones” (p. 18).

Es importante recalcar el progreso dado por la teoría de las situaciones didácticas al conectar genéticamente los conocimientos matemáticos con las situaciones-problemas. No obstante, Wilhelmi, Font, y Godino (2005) consideran que es insuficiente el análisis de los constituyentes del conocimiento: las situaciones son uno de los constituyentes, pero no el único. En la teoría de Wilhelmi, Font y Godino (2005) las situaciones didácticas se encuentran, aunque de modo explícito, para progresar en la descomposición controlada del conocimiento. Por una parte, están las situaciones de acción –que son ocasión para el desarrollo y aplicación de técnicas matemáticas de solución de los problemas–; las situaciones de formulación –comunicación en las que intervienen de manera esencial en los instrumentos lingüísticos–; y, por último, las situaciones de validación, en las cuales intervienen lo que podemos denominar objetos validativos (argumentaciones, demostraciones). Pero los conceptos y los teoremas deben ser reconocidos como constituyentes esenciales del componente discursivo del conocimiento, tanto en su versión personal (concepciones, conceptos y teoremas en acto), como institucional (conceptos y teoremas matemáticos).

2.3 TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

La teoría antropológica se ha centrado hasta el momento, casi de manera exclusiva, en la dimensión institucional del conocimiento matemático (Bosh & Gascón, 2004). Las nociones de obra matemática, praxeología y relación institucional del objeto se proponen como los instrumentos para describir la actividad matemática y los objetos institucionales emergentes de tal actividad (Font, 2002). La dimensión cognitiva es descrita en términos de la relación personal al objeto, que agrupa todas las restantes nociones propuestas desde la psicología (concepción, institución, esquema o representación interna) (Font, Godino, & Gallardo, 2013).

Esta noción de relación personal al objeto no ha sido desarrollada al considerarse como previa y determinante la caracterización de praxeologías matemáticas y el estudio de

las relaciones institucionales. De hecho, la praxeología local representa la unidad mínima de análisis de los procesos didácticos (Bosh & Gascón, 2004). Por praxeología se entiende:

“Alrededor de un tipo de tareas, T , se encuentra así, en principio una triplete formada por una técnica (al menos), t , por una tecnología de t , q , y por una teoría de q , Q . El total, indicado por $[T/t/q/Q]$, constituye una praxeología puntual, donde este último calificativo significa que se trata de una praxeología relativa a un único tipo de tareas, T . Una tal praxeología –u organización praxeológica– está pues constituida por un bloque práctico-técnico, $[T/t]$, y por un bloque tecnológico-teórico $[q/Q]$. El bloque $[q/Q]$ se identifica habitualmente como un saber, mientras que el bloque $[T/t]$ constituye un saber-hacer. Por metonimia se designa corrientemente como ‘saber’ la praxeología $[T/t/q/Q]$ completa, o incluso cualquier parte de ella. Pero esta manera de hablar estimula una minoración del saber-hacer, sobre todo en la producción y difusión de la praxeologías” (Chevallard, 1999, p. 229).

En esta definición las técnicas se describen como maneras de realizar las tareas; una técnica no es necesariamente de naturaleza algorítmica o casi algorítmica: no es así más que en casos pocos frecuentes (Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2007). Asimismo, no se hace ninguna referencia a que las técnicas se consideren herramientas para el análisis de la cognición del sujeto, sino más bien para la cognición, entendida en su sentido institucional (Font, Godino, & Gallardo, 2013). Se trata, así, de una herramienta epistémica no cognitiva.

Por otro lado, parece claro que como constituyentes de las tecnologías y de las teorías están, aunque no se ha precisado hasta el momento, los conceptos, las proposiciones y las demostraciones matemáticas, mediante las cuales se logra justificar y explicar las técnicas (Font, 2002). Para Ruiz, Estepa y García (2007), estas nociones están implícitamente contenidas en las praxeologías matemáticas y tienen una naturaleza epistémica y, por lo tanto, institucional.

El sistema de prácticas institucionales ligadas a un campo de problemas guarda gran paralelismo con la noción de praxeología (Godino & Batanero, 1994). De hecho, el punto de partida de la teoría antropológica de las matemáticas fue definir las nociones ‘sistemas de prácticas’, ‘objeto matemático’ y, sobre todo, desarrollar la relación personal al objeto (Chevallard, 1999). La distinción entre el dominio de lo personal y de lo institucional y de sus mutuas interdependencias es uno de los ejes principales de la antropología cognitiva (Godino & Batanero, 1994). No obstante, un énfasis excesivo en lo institucional puede ocultar la esfera de lo mental, de los procesos de cognición humana, que quedan diluidos en la

teorización antropológica, de los que en un enfoque sistémico de la didáctica no se puede prescindir (Chevallard, 1992). La consideración explícita de este dominio de lo personal y de lo institucional lleva a Godino y Batanero (1994) a diferenciar entre objeto institucional como base del conocimiento objetivo y objeto personal (mental) cuyo sistema configura el conocimiento subjetivo y proporciona una interpretación útil a la noción de concepción del sujeto (Artigue, 1990), así como a las de concepto y teorema en acto (Vergnaud, 1990).

Respecto de la noción de praxeología, Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi (2007) consideran que el polo tecnológico-teórico (logos) se debe descomponer explícitamente en entidades más elementales y operativas como son los conceptos, las proposiciones o las argumentaciones; y les parece necesario agregar un tercer polo (lenguaje), formado por el sistema de objetos percentiles mediante los que se expresan y operan los otros dos.

Los elementos discursivos y regulativos son densos por doquier en la actividad matemática. El análisis detallado de los procesos de resolución de tareas matemáticas revela que las fases de desarrollo de las técnicas, en general, elementos actuativos, suponen la aplicación contextualizada de objetos intensivos (conceptos-reglas y proposiciones) y validativos, al menos de manera implícita (Font, Godino, & Gallardo, 2013). De igual modo, la elaboración de justificaciones requiere la aplicación de elementos actuativos y situacionales (D'Amore & Godino, 2007). Bajo esta circunstancia, Ruiz, Estepa, y García (2007) consideran que resta relevancia a la distinción de praxis-logos (y la de tecnología-teoría).

2.4 TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES

La teoría de los campos conceptuales es la que más nociones cognitivas ha introducido: esquema, invariante operativo (concepto en acto y teorema en acto), concepto, campo conceptual y sentido de un conocimiento y otros (Vergnaud, 1990). Por tal razón se describirán, a continuación, algunas herramientas elaboradas desde la perspectiva de los campos conceptuales.

2.4.1 La noción de esquema

La noción cognitiva de esquema es básica para la teoría de los campos conceptuales. El esquema se describe como la “organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dadas” (Vergnaud, 1990, p. 136). Vergnaud (1990) dice que es en los esquemas donde se deben investigar los conocimientos que corresponden a los actos cognitivos que permiten que los actos del sujeto sean operativos. Cada esquema se asocia a una clase de situaciones cuyas características son definidas. Además, un esquema reposa siempre sobre

una conceptualización implícita, siendo los conceptos –en- acto y los teoremas –en- acto constituyentes de los esquemas operatorios (Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2007). A su vez, Vergnaud (1990) considera que los esquemas son los elementos que sostienen las competencias matemáticas. En este caso, la noción de competencia matemática se usa de manera informal y no como objeto teorizado.

Un esquema es una totalidad organizada que permite generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige (Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2007). Por ello, un esquema comporta los siguientes componentes:

- Invariantes operatorios (conceptos –en-acto y teoremas –en-acto) que pilotan el reconocimiento por el sujeto de los elementos pertinentes de la situación y la recogida de la información sobre la situación que se va a tratar.
- Anticipaciones del fin que se debe lograr, de los efectos que se esperan y de las etapas intermedias eventuales.
- Reglas de acción del tipo “si...entonces...” que permiten generar la serie de acciones del sujeto.
- Inferencias o razonamientos que permiten calcular las reglas y las anticipaciones a partir de las informaciones y del sistema de invariantes operatorios de los que dispone el sujeto.

Por tanto, la noción de esquema incorpora elementos actuativos (técnicas o modo de actuar) y elementos tecnológicos-teóricos implícitos (conocimientos en acto); pero, además, un esquema está asociado a una clase de situaciones, entendidas como tareas (Godino & Batanero, 1994). En definitiva, como se ha podido comprobar, la noción de esquema admite una interpretación coherente en términos de los sistemas de prácticas personales ligadas a un tipo de problema.

2.4.2 La noción de concepto

Los invariantes operatorios (conceptos y teoremas en acto) son entidades cognitivas, no epistémicas, al igual que ocurre con la noción de esquemas de la cual son constituyentes. En Vergnaud (1990) “un concepto –en-acto no es de hecho un concepto, ni un teorema –en-acto un teorema. En la ciencia, los conceptos y los teoremas son explícitos y se pueden discutir su pertinencia y su verdad” (Vergnaud, 1990, p. 144). Vergnaud (1990) propone una noción de concepto con una naturaleza cognitiva al incorporar en la misma los invariantes operatorios sobre los que reposa la operacionalidad de los esquemas. Esta noción es distinta de lo que son los conceptos y teoremas en la ciencia, para los que no propone ninguna conceptualización. Explícitamente Vergnaud (1990) afirma que:

Una aproximación psicológica y didáctica de la formación de conceptos matemáticos, conduce a considerar un concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción. La definición pragmática de un concepto pone, por tanto, en juego el conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades, y el conjunto de esquemas puestos en juego por los sujetos en estas situaciones (p. 145).

Con respecto a lo anterior, Godino et al. (2007) observan, primeramente, que en la aproximación dada de los procesos de conceptualización no se tienen en cuenta el uso de significantes explícitos (palabras, enunciados, símbolos y signos) y, en segundo lugar, que en dicha aproximación no se distingue con claridad el plano personal del institucional, ni su carácter relativo al sujeto individual o a los contextos institucionales. La incorporación del conjunto de situaciones y de significantes, junto con los ‘invariantes operativos constituyentes de los esquemas, lleva inevitablemente a confundir los planos cognitivos y epistémicos, lo que va a dificultar estudiar la dialéctica entre ambas facetas de la cognición matemáticas (Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2007). Esta falta de problematización de la dualidad personal-institucional se observa, también, en la noción de campo conceptual (D’Amore & Godino, 2007), que se presenta a continuación.

2.4.3 La noción de campo conceptual

El conjunto de situaciones es la primera descripción de un campo conceptual que realiza Vergnaud (1990). Sin embargo, aclara que junto a las situaciones deben considerarse también los conceptos y teoremas que se aplican en la solución de tales situaciones. En efecto, “si la primera entrada de un campo conceptual es la de las situaciones, de igual forma se puede identificar una segunda entrada, la de los conceptos y los teoremas” (Vergnaud, 1990, p.147). Así, por ejemplo, el campo conceptual de las estructuras aditivas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas (Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2007).

En Godino et al. (2007) se considera que al campo conceptual se le atribuye una naturaleza de tipo epistémica ya que en la descripción de campo conceptual ofrecida por Vergnaud (1990) no se mencionan elementos de tipo subjetivos. Los conceptos y teoremas que intervienen aquí se califican de ‘matemáticos’, nociones que no son teorizadas. La noción de concepto matemático no parece ser la misma que la noción cognitiva de concepto que acaba de definir como una tripleta heterogénea de conjuntos formados por situaciones, invariantes y significantes (Ruiz, Estepa, & García, 2007).

La noción de campo conceptual y los ejemplos que pone de ella tiene unas características muy generales como son las estructuras aditivas, las multiplicativas, la electricidad, la mecánica, las magnitudes espaciales o la lógica de clases (Font, 2002). Al igual que la noción de concepto, no se relativiza a los contextos institucionales, dificultando de este modo el análisis de la dinámica y ecología de tales formas epistémicas.

Según Godino et al. (2007), la noción de campo conceptual, que de una manera implícita también incorpora los algoritmos y procedimientos de resolución de los tipos de problemas que se incluyen en los campos conceptuales, podría asimilarse a la noción de praxeología matemática global. Ambas nociones tienen una naturaleza institucional e incluyen componentes similares. Ciertamente, la noción de praxeología es bastante más general y flexible, ya que se aplica también a tipos de problemas más puntuales, a parte de distinguir entre los dos polos del saber matemático: el saber-hacer (praxis) y el saber-que (logos) (D'Amore & Godino, 2007).

2.4.4 La noción de sentido

El sentido es una relación del sujeto a las situaciones y a los significantes. Más precisamente, son los esquemas evocados por el sujeto individual en una situación o por un significante lo que constituye el sentido de esta situación o de este significante para este sujeto. Los esquemas, es decir, las conductas y su organización. El sentido de la adición para un sujeto individual es el conjunto de esquemas que puede poner en práctica para tratar las situaciones a las cuales es confrontado, y que implican la idea de la adición (Vergnaud, 1990, p. 158).

Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2007) consideran que en esta descripción de noción de sentido realizada por Vergnaud se está haciendo corresponder a un objeto matemático, por ejemplo 'la adición', a un conjunto de otros objetos (situaciones, esquemas, significantes), es decir, a lo que anteriormente se presentaba como concepto en sentido cognitivo. Este sistema representa, entonces, el sentido o significado de la adición para el sujeto, por lo que guarda una fuerte relación con uno de los tipos de significado del enfoque ontosemiótico (D'Amore & Godino, 2007): el significado personal de un objeto matemático considerado como "sistema de prácticas personales eficaces para la resolución de un cierto tipo de problemas" (Godino & Batanero, 1994).

En este punto Wilhelmi, Font, y Godino (2005) afirman que la teoría de los campos conceptuales no introduce una versión institucional de la noción de sentido, por lo que se dificulta el estudio de la dialéctica entre las dimensiones personales e institucionales de la

cognición matemática. Además, se tiene que analizar si los sistemas de prácticas son una interpretación más general y flexible de las nociones de esquema y concepto, como herramientas para la descripción del comportamiento matemático de los estudiantes. Para Legrand (1996), la noción de esquema y concepto es “un análisis muy fino de los procedimientos de pensamiento de los gestos intelectuales del estudiante, puesto que, de algún modo, es la facilidad del alumno en la realización de estos gestos lo que le va a permitir principalmente entrar en la situación que va a condicionar la atribución de sentidos adaptados” (p.246).

El interés de la teoría de los campos conceptuales por los comportamientos de los estudiantes determina la diferencia fundamental entre esta teoría y la teoría de las situaciones didácticas (Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2007). De esta manera, la teoría de los campos conceptuales puede ser considerada como una teoría que clarifica, esencialmente, el funcionamiento individual del alumno o del profesor, mientras que la teoría de las situaciones didácticas clarifica más el funcionamiento de la clase (Legrand, 1996).

2.4.5 La noción de concepción

La noción de concepción es la más usada para el análisis cognitivo en didáctica de las matemáticas (Artigue, 1990). La teoría de las situaciones didácticas y la teoría de los campos conceptuales utilizan esta noción en sus modelos de análisis. En Artigue (1990), se trata de poner en evidencia la pluralidad de los puntos de vista posibles sobre un objeto matemático, diferenciar las representaciones y modos de tratamiento que se le asocian, poner en evidencia su adaptación más o menos adecuada a la resolución de distintas clases de problemas. En el término “concepción” se aprecian dos sentidos complementarios: el punto de vista epistémico ligado a la naturaleza compleja de los funcionamientos, y el punto de vista cognitivo que trata los conocimientos del sujeto en relación con un objeto matemático en particular (Artigue, 1990). Así, Artigue (1990) habla de que “un conjunto de concepciones es definido *a priori* con referencia a once definiciones distintas de círculo, y también se habla de las concepciones del sujeto sobre el concepto de círculo, tangente, límite” (p. 268).

Sobre las concepciones del sujeto surgen dos tipos de uso. Por un lado la cognición global que tiene en cuenta la totalidad de la estructura cognitiva del sujeto en un momento dado en relación a un objeto. En este caso, una concepción representa un concepto subjetivo, en términos de situaciones, invariantes y significantes (Vergnaud, 1990). Y por otro, la concepción como un objeto local, estrechamente asociada al saber puesto en juego y a los diferentes problemas en cuya resolución intervienen (Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2007).

Sin embargo, el uso de “concepción” basado en un enfoque cognitivo conlleva unas connotaciones fuertemente mentalistas. El uso técnico de la noción de “concepción” no parece muy distinto del uso que se hace del mismo en el lenguaje ordinario. En palabras de Godino et al. (2007) “la idea que tiene una persona en su mente cuando piensa sobre algo en un momento y circunstancia dada” (p. 71). Con otras palabras, los conocimientos y creencias son entendidos únicamente como entidades mentales y, por lo tanto, no susceptibles de generalización a colectivos sociales en el enfoque cognitivista (Wilhelmi, Font, & Godino, 2005).

Por otro lado, desde la epistemología la noción de concepción es modelizada como objeto que permite la acción o la argumentación del sujeto con relación a la búsqueda de una respuesta a una cuestión matemática (Antibi & Brousseau, 2000).

Una concepción está dada por un conjunto relativamente organizada de conocimientos utilizados con bastante frecuencia, y conjuntamente, sobre un conjunto de situaciones (para el cual son pertinentes, adecuadas, útiles...) y que se manifiestan mediante un repertorio relativamente estable y limitado de comportamientos, lenguajes, técnicas (Antibi & Brousseau, 2000, p. 20).

Desde la perspectiva antropológica, la concepción comprende también las destrezas, las disposiciones, capacidades lógicas y discursivas, en definitiva, la relación personal al objeto (Chevallard, 1999). En esta interpretación de la concepción se observa que si la noción de conocimiento es lo suficientemente amplia, de modo que abarque tanto los conocimientos de ‘saber hacer’ (praxis) como ‘saber qué’ (logos), la concepción del sujeto viene a ser equivalente a la faceta no ostensiva, es decir, interiorizada, de los subsistemas de prácticas personales asociadas a un objeto y relativas a un contexto de uso o un marco institucional (Wilhelmi, Font, & Godino, 2005).

2.5 TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICA Y LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Diversas publicaciones recientes como las de Radford (1999) y Godino (2010) están resaltando el papel que la ciencia de los signos, la semiótica, puede jugar para describir y comprender fenómenos relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De acuerdo con Radford (1999), las razones del interés suscitado por la semiótica en la educación matemática son diversas. Por un lado, ha habido una toma de conciencia progresiva del hecho de que, dada la generalidad de objetos matemáticos, la actividad matemática es,

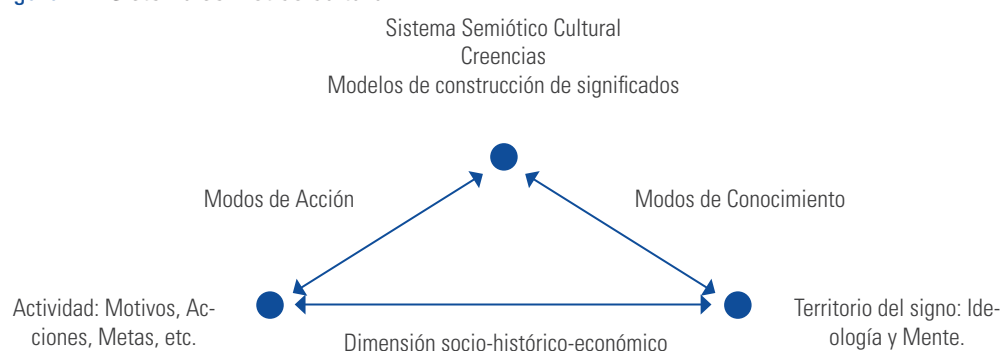
esencialmente, una actividad simbólica. Por otro lado, el interés que suscitó en los años 90 la comprensión de la comunicación en el aula puso en evidencia la importancia que tiene, tanto para el investigador como para el maestro, comprender la naturaleza del discurso matemático (Godino, 2010). La semiótica, con su arsenal de métodos y conceptos, aparece como teoría apropiada para dar cuenta de dicha complejidad discursiva.

En este sentido, este apartado se centra en estudiar los signos según diversas teorizaciones, las bases de la teoría de Duval (1993) sobre los registros de representación semiótica y el papel que esta teoría tiene en el uso de ejemplos y contraejemplos, la transferencia y la resolución de problemas y en el cómo se interpretan los errores desde esta perspectiva.

2.5.1 Los signos según diversas teorizaciones

Entre las diferentes teorizaciones acerca de los signos, en el trabajo Radford (1999) se estudia las relaciones entre cultura y mente, se discute las leyes genéticas del desarrollo cultural de Vygotsky y la repuesta que éste da a la cuestión sobre los enlaces entre cultura y sociedad en la constitución de la mente. Esto da lugar a una elaboración del bagaje semiótico del individuo en términos de internalización a través de los signos y de las actividades que el sujeto efectúa en el plano externo. En el contexto de los significados sociales se define “la noción de sistemas semióticos culturales como sistemas compuestos por creencias, las cuales generan modelos de construcción de significados a través de actividades y del uso del signo; y que están estructuradas según el modo concreto de existencia de los individuos” (Radford, 1999, p. 23-24). Todas esas relaciones pueden comprenderse en el gráfico que muestra la figura 2.1:

Figura 2.1: Sistema semiótico cultural

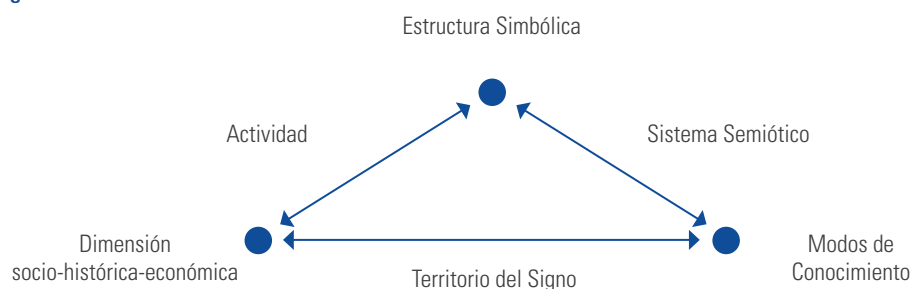


Fuente: Radford (1999).

Una de las características del sistema semiótico cultural reside en las relaciones que guarda, por una parte, con la ideología y el territorio del signo, en general; y, por otra, con

las actividades individuales (Contreras, 2006). Mientras que con las primeras la relación se establece por medio de los modos de conocimiento, o epistemes entre un grupo cultural y el contenido verdadero de las ideologías, en las segundas la relación se da según los modos de acción en los que las actividades están incluidas. La naturaleza de la dialéctica de las relaciones de los enlaces del sistema semiótico cultural, actividad y uso del signo, que se muestran en la figura 2.1, permite generar el dual del primer gráfico que se muestra en la figura 2.2:

Figura 2.2: Dual del sistema semiótico cultural



Fuente: Contreras (2006).

El gráfico dual (figura 2.2) muestra que tanto el sistema semiótico cultural como el territorio del signo y la actividad no son sólo meros puntos terminales de un proceso dinámico, sino que llegan a ser agentes de un proceso completo (Contreras, 2006). Por supuesto, el sistema semiótico cultural llega a ser el enlace entre la estructura simbólica y los modos de conocimiento.

En términos de desarrollo, el primer gráfico y el gráfico dual son siempre alternativos. Es decir, por medio del concepto del sistema semiótico cultural, se intenta dar una aproximación post-vigotskiana que dé respuesta al problema de la formación social de la mente al mostrar cómo el problema de la internalización, en sentido vigotskiano, no es un mero mimetismo transferencial de una actividad externa en el plano interno pre-existente, sino que en dicha internalización el signo es el verdadero mediador (Radford, 1999). Respecto a la teoría de las funciones semióticas Contreras (2006) observa que, al no hacer objetivas unas entidades ontológicas de la actividad matemática manejable, los resultados suelen ser poco explicativos.

Berger (2004) afirma que los estudiantes aprenden a utilizar el signo matemático para comunicarse y como objeto por medio del cual organizan sus ideas matemáticas, incluso antes de comprender totalmente el significado del signo. A esta utilización la denomina uso funcional del signo. Este autor se apoya, siguiendo la teoría de Vygotsky, en el papel que juegan las palabras en la formación de conceptos en el niño. Por tanto, plantea que “el

uso funcional del signo matemático en contexto social, permite la construcción del significado personal, el cual es también congruente con el significado cultural del signo” (Berger, 2004, p. 84). Respecto a lo que es el signo, Berger señala que, en el contexto de la educación matemática, un signo puede ser un símbolo matemático, una sentencia matemática, una expresión matemática, el nombre de un objeto matemático y, así, sucesivamente. En línea con Vygotsky, y tal como lo expresa Radford (1999):

El signo como dotado como una doble vida, por una parte, los signos funcionan como instrumentos que permiten al individuo comprometerse en la praxis cognitiva; por otra, son parte de aquellos sistemas que trascienden al individuo y a través de los cuales la realidad social es objetivada (p. 83).

En esta línea, debe entenderse la praxis cognitiva como aquella que toma forma de actividades tales como la imitación, la asociación, la manipulación y la reflexión de los signos por el individuo (Berger, 2004). Un signo tiene un significado cultural cuando es congruente con el uso que le da la comunidad matemática (Contreras, 2006). Así, por ejemplo, la sentencia matemática “ $d/dx x^3=3x^2$ ” es culturalmente significativa, aunque quizás sentencias como “ x^2+1 ” es verdadero o “ $=$ ” no sean significativas culturalmente.

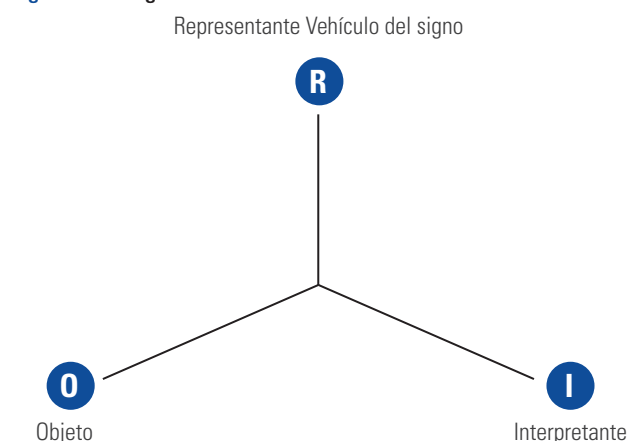
El término significado personal se refiere al estado en el que un estudiante cree, siente o piensa, tácita o explícitamente, que ha entendido el significado cultural de un objeto (Font, Godino, & Gallardo, 2013). En este contexto una concepción errónea, por ejemplo, puede ser personalmente significativa, aunque su uso no sea culturalmente significativo. Contrariamente, una persona puede no encontrar significativo a la definición de un objeto matemático específico, incluso aunque sea culturalmente significativo.

Es decir, en Berger (2004) se interpreta el signo bajo una perspectiva funcional, como organizador de las ideas matemáticas del sujeto. De la misma manera, se utilizan los constructos de significado personal y significado cultural, aunque desde una perspectiva cognitiva, coincidentes en la denominación con las teorías de las funciones semióticas, aunque con una mayor aportación de este último enfoque ya que con él se operativiza, de modo pragmático, estas nociones a través de los sistemas de prácticas.

En cambio, en Sáenz-Ludlow (2003) se analiza la contribución de Peirce a la semiótica, el cual no conceptualizó el signo como díada en la forma objeto-representación (significado-significante), sino como una tríada en la forma de objeto-representación-interpretación. Es decir, considera el signo como un proceso general de representación en el que el objeto, el representante y el interpretante del signo juegan un importante

papel. Los signos, en el sentido más amplio, son entidades que sirven de vehículo para poner en funcionamiento el pensamiento original y convencional y facilitar su expresión y personificación (Sáenz-Ludlow, 2003, p. 182). Peirce denomina a la idea mental u objeto físico que representa el signo como objeto del signo; el interpretante del signo es la idea producida en la mente del interpretador y el representante de un signo el vehículo mental o material utilizado para representar el objeto. Véase en la siguiente figura (Figura 2.3), el signo triádico de Peirce:

Figura 2.3: Signo triádico de Peirce



Fuente: Contreras (2006).

Cabe destacar, en este punto, que un interpretante no debe confundirse con el interpretador. El interpretante no es algún resultado o producto generado por el signo, lo que resulta del signo; sino que personifica la actividad cognitiva del interpretador (Sáenz-Ludlow, 2003). Es decir, un signo dirige a alguien. Esto es, crea en la mente de la persona un equivalente del signo o, quizás, un mayor desarrollo del signo.

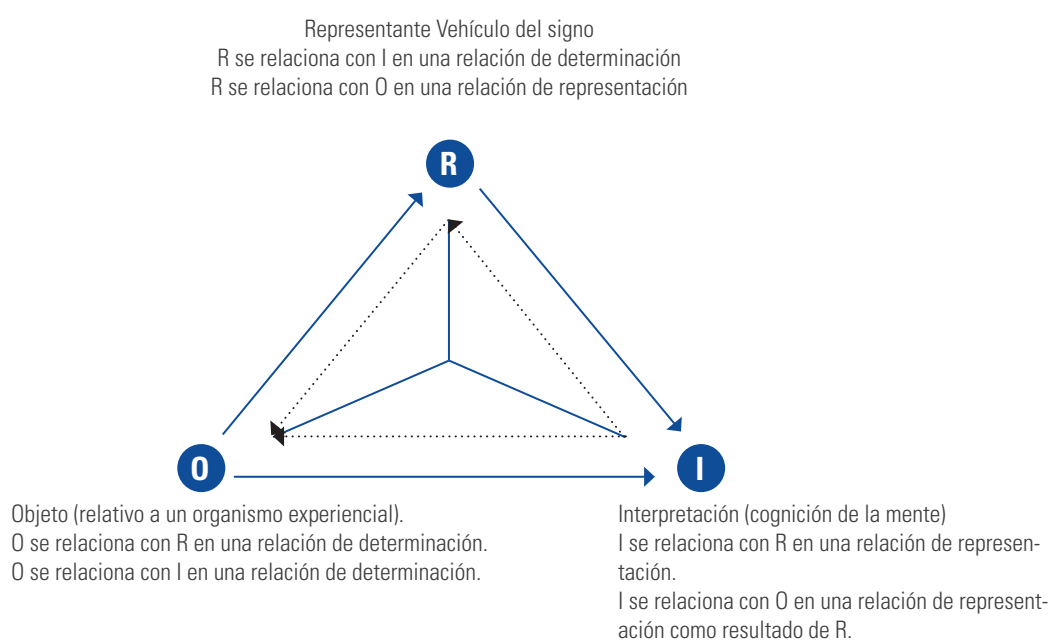
La semiosis consiste en un proceso triádico en el cual un objeto genera un representante, el representante genera un interpretante y, análogamente, éste genera un nuevo representante que representa un objeto modificado que determina un interpretante más sofisticado y, así, sucesivamente la espiral de signos continua (Contreras, 2006). Por lo tanto, la semiosis es un proceso indefinido en el cual se generan potencialmente una serie de interpretantes, representantes y objetos.

Particularmente, el concepto de semiosis adquiere un papel operativo en Peirce. El signo tiene una naturaleza triádica inherente a las relaciones diádicas entre esos tres elementos, es decir, tiene relaciones entre objeto y representante, representante e interpretante, y objeto e interpretante (Sáenz-Ludlow, 2003). Sin embargo, la naturaleza triádica del signo no puede resolver esas tres relaciones diádicas separadas, ya que cuando la relación diádi-

ca entre objeto y representante se enfoca, las otras dos relaciones diádicas están también implicadas de una manera sinérgica, incluso si ellos no llegan a la mente del interpretador de una vez. Pierce llama a esta semiosis, semiosis de relación trirelativa.

En Sáenz-Ludlow (2003), se considera la dinámica del signo en términos de vectores de determinación y representación. En la figura 2.4, los vectores de dirección opuesta simbolizan la dialéctica entre determinación y representación. El vector de determinación entre O e I es la suma de los vectores de determinación entre O y R, y R e I; y el vector de representación entre I y O es la suma de los vectores de representación entre I y R, R y O. El enlace entre los vectores de representación y de determinación implica que los tres elementos de la relación del signo no son nunca permanente objeto, representante e interpretante; sino que cada uno cambia su papel cuando se realizan futuras relaciones de determinación y representación. De aquí que cuando uno se centra en uno de los elementos del signo, los otros dos están simultáneamente presentes y sinérgicamente activos (Sáenz-Ludlow, 2003). Es decir, en la semiosis, objeto, representante e interpretante no son nunca entidades estáticas y aisladas, sino que están cambiando como entidades interrelacionadas que llegan a existir como resultado de los procesos de interpretación y representación de los intérpretes (Contreras, 2006). Véase en la figura 2.4:

Figura 2.4: El signo en términos de vectores



Fuente: Contreras (2006)

Una vez que el objeto inicial determina un representante y un interpretante, el interpretante determina un nuevo objeto representante, el cual representa un nuevo objeto

que determina un nuevo y más sofisticado interpretante. Según Contreras (2006), cada nuevo interpretante representa un significado más sofisticado y mucho más determinado. La secuencia de tríadas, a saber, objeto-representante-interpretante, representante-objeto-interpretante y, así, sucesivamente, constituye la fuerza de la semiosis (Sáenz-Ludlow, 2003). El poder del interpretante para crear un objeto más descontextualizado es lo que Peirce denomina abstracción hipotética. Así, la tríada del signo de Pierce es un movimiento perceptual dinámico y virtual que incluye procesos abiertos de representación y determinación de los que las cadenas de significación emergen. En este proceso, el signo llega a transformarse en pensamiento cuando se hace transparente en las relaciones de determinación y representación mediadas por él.

Es decir, por parte del interpretador se manifiestan cadenas de significación en la continuidad de los procesos de determinación y representación. Cuando esos procesos del interpretador se comparten con los miembros de un grupo, llegan a contribuir en los procesos de determinación y representación de otros individuos y del grupo como colectividad (Contreras, 2006). Parmentier citado por Sáenz-Ludlow (2003) interpreta el signo según la tripleta de Pierce –objeto, representante, interpretante–, aunque utiliza el concepto de semiosis en el que la representación y la determinación le dan un carácter sinérgico en un verdadero proceso de semiosis limitada. Contreras (2006), por su parte, considera que el constructo función semiótica de ésta, por una parte, le confiere un carácter mucho más pormenorizado al análisis de la actividad matemática y, por otra, permite dar una visión más amplia al carácter relacional de los objetos matemáticos, al abrir la posibilidad de las funciones semióticas entre objetos correspondientes a la ontología que describe.

2.5.2 La comprensión de los conceptos matemáticos

En su trabajo del 2005, González concibe el proceso de comprensión como un juicio que ocurre en la mente del estudiante y que se forma a partir de una secuencia de actividades de aprendizaje que conllevan, a su vez, varios procesos mentales. Para entender mejor qué sucede exactamente es necesario provocar reacciones en el estudiante. En este sentido, los conceptos de esquema y representaciones externas e internas los podemos encontrar analizados y relacionados, en la actualidad, con aspectos teóricos como los sistemas semióticos de una representación y sus implicaciones en la articulación entre representaciones internas. Duval (2004) señala los siguientes:

- **Objetos físicos:** los que pueden tocarse y actuar sobre ellos.
- **Objetos fenomenológicos:** tamaño, color... No se pueden tocar, separar.
- **Objetos del conocimiento:** caracterizados por invariantes. Los hay en física, biología y matemáticas.

En consonancia con lo anterior, Duval (2000) afirma que no hay conocimiento sin representación. Sin embargo, hay una brecha importante entre el conocimiento matemático y el conocimiento en otras ciencias. Los objetos de las matemáticas son objetos del conocimiento: no tenemos ningún acceso perceptivo o instrumental a los objetos matemáticos, ni siquiera los más elementales. No podemos verlos ni estudiarlos a través de un microscopio, ni tomar una fotografía de ellos. Tal y como señala Duval (1993), la distinción entre un objeto matemático y su representación es fundamental para la comprensión de las matemáticas. Lo cual da lugar a la paradoja cognitiva del pensamiento matemático: por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos (Duval, 2004).

En consecuencia, ¿cómo no van a confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas los sujetos que están en el proceso de aprendizaje, si sólo se enfrentan a las representaciones semióticas? (Duval, 1993, 2004). Como ejemplo, Duval (2000) señala que estos conflictos comienzan temprano con los números, que acaban siendo identificados con dígitos y los sistemas numéricos utilizados.

Los objetos del conocimiento no son accesibles a través de datos físicos, ni a través de evidencias sensoriales o instrumentales (Artigue, 1999; Duval 2004). Por tanto, el uso de diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático es absolutamente necesario para conseguir obtener una comprensión de las matemáticas. No obstante, los registros semióticos no tienen una mera función de exteriorización o comunicación de las representaciones mentales, pese a ser fundamentales para el funcionamiento cognitivo y para la conceptualización. Sin embargo, la enseñanza tiende a reducirlos al rol de la exteriorización y comunicación. De hecho, las investigaciones tienden a mostrar que la enseñanza, cuando quiere ser sensible a la dimensión semiótica del trabajo matemático, permite superar dificultades, no importa cuán resistentes parezcan ser (Duval, 2004).

Como consecuencia de lo anterior, una de las formas que existen de explicar la construcción de los conceptos matemáticos consiste en hacer uso de los registros de representación y promover las articulaciones entre las representaciones de esos registros. Esto se debe a que una de las ideas fundamentales es que las representaciones de los objetos matemáticos son parciales con respecto a lo que representan. Por tanto, contar con actividades de conversión en, por los menos, dos registros de representación se vuelve una tarea fundamental para que las representaciones en juego, que por su naturaleza son complementarias, proporcionen un soporte a la construcción del concepto en cuestión. Desde el punto de vista de la resolución de problemas, cobra nuevamente una importancia destacada la construcción de una red de conocimiento que pueda permitir a los estudiantes

interaccionar entre su conocimiento conceptual y el procedimental, es decir, el papel de la idea de transferencia en la resolución de problemas.

2.5.3 Teoría de Duval sobre los registros de representación semiótica

Cada vez más, las investigaciones muestran que “el aprendizaje descansa, de forma decisiva en la flexibilidad del funcionamiento matemático por medio de articulaciones (las articulaciones son las conexiones entre una parte y el todo, o entre parte y otra parte) de punto de vista, ya sea por medio de registros de representación o por marcos de funcionamiento matemático” (Artigue, 1999, p. 1379). La conceptualización también aparece más dependiente de las herramientas concretas y simbólicas del trabajo matemático (Artigue, 1999). Duval (2000) afirma que para estudiar la complejidad del aprendizaje matemático hay que tener en cuenta, también, a los estudiantes y no solamente la complejidad epistemológica de los conceptos matemáticos.

Antes de describir el marco teórico que diseña Duval (1993), es necesario mencionar el trabajo desarrollado por Skemp (1980) sobre la formación de conceptos. Aceptando que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por medio de los sentidos y que para la formación de un concepto es necesario cierto número de experiencias que compartan elementos comunes, en tanto que solamente a través de las representaciones semióticas tenemos acceso a estos objetos, Skemp analiza el papel que juegan las representaciones en la construcción del conocimiento matemático:

Consideramos cómo los conceptos se disponen reunidos para formar estructuras conceptuales denominadas esquema... [...] Abstrayendo y clasificando. [...] A un nivel más bajo, clasificamos cada vez que reconocemos un objeto como “uno que hemos visto antes”. [...] Desde estas diversas entradas, abstraemos ciertas propiedades *invariantes* que persisten en la memoria más tiempo que el recuerdo de una particular presentación del objeto. [...] *Abstraer* es una actividad por la cual nos hacemos conscientes de similitudes (en el sentido cotidiano, no en el matemático) entre nuestras experiencias. *Clasificar* significa reunir nuestras experiencias sobre la base de estas similitudes. [...] Un concepto requiere para su formación un cierto número de experiencias que tengan algo en común. [...] Un concepto es una idea [un objeto puramente mental] (Skemp, 1980, p. 23).

Cada uno de éstos [conceptos], por su verdadera naturaleza, está incorporado en una estructura de otros conceptos. Cada uno de ellos [...] se deduce de otros conceptos, y contribuye a la formación de otros;

por tanto, es parte de una jerarquía. [...] Un esquema tiene dos funciones principales. Integra conocimiento existente y es un instrumento mental para la adquisición de nuevo conocimiento. [...] *Comprender algo significa asimilarlo dentro de un esquema apropiado* (Skemp, 1980, p. 41)

Sabiendo que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por medio de los sentidos sino a través de sus representaciones semióticas, queda claro que es importante analizar el papel que juegan estas representaciones en la construcción del conocimiento matemático. Con esta idea, las operaciones de clasificar y abstraer se realizarán a través de la manipulación de las representaciones semióticas del objeto matemático. Es significativo precisar que, aunque no exista distinción clara entre muchos procesos de pensamiento matemático elemental y avanzado, quizá sirva como distintivo su complejidad y la forma de enfrentarse a ésta. Para Dreyfus (1991) las dos formas más importantes de enfrentarse a esta complejidad sería la representación y la abstracción. El estado ideal es que estas representaciones se complementen entre sí, integrando una sola representación del concepto, con lo que se llega a la abstracción. La falta de complementariedad entre éstas podría ocasionar conflictos.

En Hitt (2001) se profundiza en el fenómeno de la comprensión a partir de la idea de red y se transforma la idea de esquema de Piaget y Skemp:

Una idea matemática, procedimiento o hecho es entendido si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión es determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea matemática, procedimiento o hecho es entendido profundamente si éste está ligado a una red existente con fuertes o más numerosas conexiones (Hitt, 2001, p. 46).

Los problemas de manipulación de representantes dentro de un sistema matemático de signos y sobre los problemas de conversión de representaciones entre dos o más sistemas de un mismo objeto matemático, ha generado la noción de registro de representación (Duval, 1993). Duval (2000) señala que cuando se habla de representaciones es necesario considerar los siguientes aspectos:

Tabla 2.1: Algunas consideraciones sobre las representaciones

El sistema por el cual se produce la representación: Cualquier representación se produce a través de sistema particular. El contenido de la representación de un objeto cambia de acuerdo con el sistema de representación que se utiliza para su producción. El pensamiento humano requiere la movilización de varios sistemas de representación de producción y su coordinación.	Aparato físico (como una cámara)
	Una organización mental (como las imágenes visuales)
	Un sistema semiótico (como varios lenguajes).
La relación entre la representación y el objeto representado.	Aparatos físicos y organizaciones neurológicas (imágenes físicas y mentales). La relación se basa en la acción de un objeto sobre el sistema (casualidad).
	Sistemas semióticos (palabras, símbolos y dibujos). La relación es sólo de denotación.
La posibilidad de un acceso al objeto representado, además de la representación semiótica.	Lo que son una evocación de lo que ha sido realmente percibido, o podría serlo, y sus representaciones.
	Las que lo son de objetos que no pueden ser percibidos (como los objetos matemáticos).
La razón por la que el uso de la representación es necesario.	Para procesamientos (cómputo o expansión discursiva, anamorfosis,...).

Fuente: Duval (2000).

También, en el año 1993, Duval propone una definición de lo que entendemos por las representaciones semióticas. Éstas se distinguen de las representaciones mentales de la siguiente manera:

Las representaciones mentales cubren al conjunto de imágenes y, globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que les está asociado. Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias restricciones de significado y de funcionamiento. Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes (Duval, 1993, p. 54).

Con respecto a lo anterior, las representaciones semióticas están simplemente subordinadas a las representaciones mentales, ya que el desarrollo de las últimas depende de una interiorización de las primeras y que sólo las representaciones semióticas permiten realizar ciertas funciones cognitivas esenciales como la de tratamiento (Duval, 1993).

El funcionamiento cognitivo del pensamiento humano se revela como inseparable de la existencia de una diversidad de registros semióticos de representación. Para Duval (1995), las actividades de semiosis y noesis pueden ser consideradas como una abstracción y se presentan como fundamentales desde su punto de vista:

Si se llama semiosis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica y noesis a la aprehensión conceptual de un objeto, es necesario afirmar que la noesis es inseparable de la semiosis. [...] No hay noesis sin semiosis [...]. En la actividad matemática es esencial ya sea poder movilizar varios registros de representación semiótica (figuras, gráficas, escrituras simbólicas, lengua natural...) en el transcurso de una misma gestión, o poder escoger un registro en lugar de otro. E, independientemente de la conveniencia del tratamiento, este recurso a varios registros parece incluso una condición necesaria para que no se confunda a los objetos matemáticos con sus representaciones y para que también se les pueda reconocer en cada una de ellas. La coordinación de varios registros de representación semiótica aparece, así como fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos: es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de sus posibles representaciones (Duval, 1993, p. 55).

Duval (2004) afirma que hay dos tipos de transformaciones de representaciones en cualquier actividad matemática: las realizadas en el mismo registro (tratamiento) y las realizadas cambiando de registro (conversión); y puntualiza que ambas son fuentes de incomprendiones en el aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, un sistema semiótico puede ser un registro de representación si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

- La formación de una representación identificable como una representación de registro. Esta formación implica una selección de rasgos y de datos en el contenido por representar. La selección se hace en función de las unidades y de las reglas de formación que son propias del registro semiótico en el cual se produce la representación. Esta formación debe respetar las reglas. La función de estas reglas es asegurar, en primer lugar, las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación y, en segundo lugar, la posibilidad de su utilización para los tratamientos. Son reglas de conformidad, no son reglas de producción efectiva de un sujeto. Ello quiere decir que el conocimiento de reglas de conformidad no implica la competencia en la formación de representaciones, sino sólo en reconocerlas (Duval, 1993).

- El tratamiento de una representación es la transformación de la representación en el mismo registro donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro. Existen reglas de tratamiento propias de cada registro (Duval, 1993).
- La conversión de una representación. Se trata de la transformación de la representación en una representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o solamente una parte del significado de la representación inicial. La conversión es una transformación externa al registro de partida. La conversión es una actividad cognitiva diferente e independiente del tratamiento (Duval, 1993).

Como ejemplo, Duval (1993) plantea la ilustración: conversión de una representación lingüística en una figural; la traducción: conversión de una representación lingüística en una lengua dada en una representación lingüística de otra; y la descripción: conversión de una representación no verbal en una representación lingüística. Además, señala, por ejemplo, que la escritura decimal, la escritura fraccionaria y la escritura con exponentes constituyen tres registros físicos de representación de números. Es claro que las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias en tanto que éstos no son directamente accesibles por la percepción o a través de una experiencia intuitiva inmediata. Además, la posibilidad de efectuar tratamientos sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótica utilizado. Duval (2000) enuncia que, al ser cada representación parcial con respecto a lo que representa, se debe considerar como absolutamente necesario la interacción entre diferentes representaciones para la formación del concepto. Por otro lado, afirma que la adquisición del concepto en un individuo se dará en el momento que haya una coordinación, libre de contradicciones, entre las diferentes representaciones del objeto matemático. Concretamente, en Duval (2000) aparecen las definiciones de registro de objeto matemático:

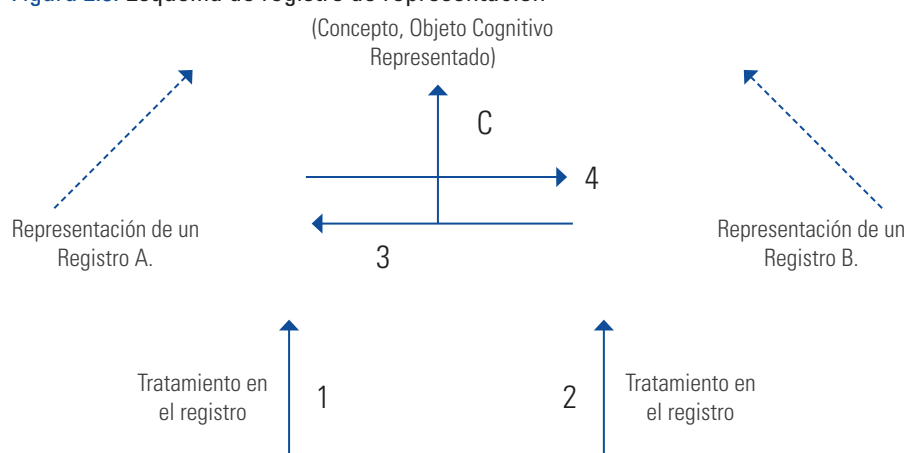
- **Registro multifuncional:** son utilizados en todos los campos de la cultura. Se utilizan también con motivos de comunicación y de procesamiento. Ofrecen un amplio rango de procesamientos variados. Así, el lenguaje natural se usa necesariamente en matemáticas, pero no con el mismo funcionamiento que en la vida cotidiana. Dentro de estos registros, los procesamientos no se pueden realizar o cambiar de forma algorítmica.
- **Registro monofuncional:** desarrollado para un tipo específico de procesamiento, tiene el propósito de realizar ejecuciones más potentes y menos costosas que las de los registros multifuncionales. El procesamiento se vuelve técnico y el uso de signos y expresiones depende primero de su forma. El procesamiento técnico es formal, lo que explica que el procesamiento se pueda expandir como algoritmos.

Duval (2000) afirma que la comprensión en la disciplina de las matemáticas requiere de la coordinación de, al menos, dos registros, de los que uno es multifuncional

y el otro es monofuncional. Aprender matemáticas implica tanto la incorporación de registros monofuncionales como la distinción de las posibles formas diferentes de trabajar en los registros multifuncionales. Pero esto no es todo. Aprender matemáticas implica su coordinación o su descompartimentalización. Dicho de otro modo, la conversión entre representaciones no-congruentes se inhibe. Desde este punto de vista, el concepto siempre estará en construcción.

De manera esquemática, la caracterización de un registro de representación se podría reproducir tal y como se observan en la siguiente figura:

Figura 2.5: Esquema de registro de representación



Fuente: Duval, (2004).

Las flechas 1 y 2 corresponden a las transformaciones internas a un registro. Las flechas 3 y 4 corresponden a las transformaciones externas, es decir, a las conversiones por cambio de registro. La flecha C corresponde a lo que se denomina comprensión integradora de una representación y supone una coordinación entre dos registros. Las flechas discontinuas corresponden a la clásica distinción entre representante y representado. Naturalmente, este esquema considera el caso más simple de la coordinación entre dos registros.

Tal y como se ha podido constatar hasta el momento, el aprendizaje matemático no consiste, pues, en una construcción de conceptos por los estudiantes, sino en la construcción de la arquitectura cognitiva del objeto epistémico. Lo que está en juego en la educación matemática a través de adquisiciones particulares de conceptos es la construcción de esta arquitectura, ya que crea futuras habilidades para posteriores aprendizajes y para un mayor entendimiento global. Pero este aspecto no siempre se logra ya que la conciencia individual del estudiante, con sus creencias, evidencias e intereses, a menudo se ve confundida con el trabajo en procesos de pensamientos.

Con relación a lo anterior, Duval (1993) menciona tres actividades cognitivas ligada a la semiosis, sólo las dos primeras (formación y tratamiento) se toman en cuenta en la enseñanza tradicional, tanto en la organización de secuencias de aprendizaje, como en la construcción de cuestionarios de evaluación. Algunas consideraciones generales en la enseñanza tradicional. Por un lado, Duval (1993) dice que la conversión de las representaciones resultaría por sí misma desde el momento en que se es capaz de formar representaciones en registros diferentes y de efectuar tratamiento sobre las representaciones. Por ejemplo, construir una gráfica o escribir una ecuación y sustituir en ella los valores numéricos de las variables. Y por otro, la conversión no tiene importancia real alguna para la comprensión de los objetos o de los contenidos conceptuales representados, puesto que su resultado se limita a un cambio de registro.

Ligado a este último punto, cabe destacar el papel esencial en el aprendizaje de la conceptualización. De este modo, si la conceptualización implica una coordinación de registro de representación, los aprendizajes básicos en las matemáticas no pueden apostar sólo por la automatización de ciertos tratamientos o la comprensión de nociones, sino que también deben aportar la coordinación de los diferentes registros de representación movili-zados de manera necesaria para estos tratamientos o para esta comprensión. En general, la enseñanza de las matemáticas se organiza como si la coordinación de los diferentes registros de representaciones introducidos o utilizados se efectuara rápida y espontáneamente, como si los problemas y los costos ligados no existieran. Esto a pesar de que varias investigaciones enfatizan la importancia del cambio de registro en el aprendizaje de nociones tales como las funciones o los números reales. Ver los conceptos en múltiples registros y desde múltiples perspectivas permite a los estudiantes organizar mejor su conocimiento. Y esto se considera una condición cognitiva necesaria para el aprendizaje (Robert & Speer, 2001).

Más aún, aparecen motivos profundos para la no comprensión (Duval, 2000). Cuando se cambia de sistema semiótico, el contenido de las representaciones cambia, mientras que el objeto denotado permanece invariante. Pero, como los objetos matemáticos no pueden ser identificados con ninguna de sus representaciones, muchos estudiantes no pueden discriminar entre el contenido de la representación y el objeto representado: para los estudiantes los objetos cambian cuando se cambia la representación. En este sentido, Duval (2000) señala que, en cualquier nivel y entre muchos estudiantes, se pueden observar la inhabilidad de convertir una representación de un sistema semiótico en una representación del mismo objeto en otro sistema, como si las dos representaciones se refiriesen a dos objetos distintos. Esta dificultad subyace a las dificultades de transferencia de conocimiento y también a las dificultades para traducir enunciados verbales de un problema en datos numéricos o simbólicos relevantes para la resolución.

Es evidente que esta falta de consideración de la coordinación de registros no es por azar o por negligencia. La casi ausencia de reglas que pudieran favorecer la actividad cognitiva de conversión podría bastar para explicarlo. Además, no es seguro que proponer ejercicios locales de conversión permita favorecer esta coordinación. Por tanto, un aprendizaje que considere la relación estrecha que existe entre la noesis y la semiosis debe colocar a los estudiantes en condiciones que permitan esta toma de conciencia global y, para ello, se les debe presentar tareas específicas.

En esta perspectiva, tres tipos de tareas extremadamente diferentes parecen imponerse (Duval, 2000). El primer tipo concierne a la aprehensión de las representaciones semióticas, el segundo, al aprendizaje de los tratamientos propios de una cierta categoría de registro; y el tercero se refiere al modo de producción de representaciones complejas.

Finalmente, citamos el trabajo de Richard (2004) sobre el uso del registro gráfico para el razonamiento de los estudiantes. Su trabajo admite la pluralidad del proceso cognitivo por el que se forma un concepto, lo que lleva a considerar los conceptos de figura como pre-conceptos geométricos. Incluso un preconcepto geométrico que es coherente en relación a la situación en la que interviene puede no tener coherencia global en la estructura cognitiva de la persona que lo pone en funcionamiento. En particular, el trabajo de Richard (2004) se plantea la cuestión de la legitimización del razonamiento matemático en la expresión escrita que considera conjuntamente las palabras, las notaciones algebraicas y, particularmente, el empleo de otros registros de representación semiótica en matemáticas. Es decir, propone que las nuevas posibilidades de representación generada por las calculadoras gráficas y los programas de geometría dinámica, principalmente con la interacción y la representación del movimiento, reclaman una revisión de las relaciones tradicionales entre los registros gráficos y el razonamiento (Richard, 2004).

En este orden, Richard (2004) formula la teoría sobre la constitución de multi-registro de la representación y en la integración del razonamiento en la actividad cognitiva que se desarrolla al realizar una tarea coordinando sistemas de representación complementarios. Se apoya en la afirmación de que el uso conjunto de varios registros en clase de matemáticas no es un artificio pedagógico desligado del cuadro epistemológico que les ha dado origen. También toma en cuenta la idea de expansión gráfica, que no se contradice con la de aprehensión operativa, sino que es complementaria en el sentido de que si, generalmente, es necesario introducir una situación de resolución de problemas o de validación con la ayuda de un texto (que puede incluir grafías algebraicas), es porque el registro figural no es una lengua. Contrariamente a lo que sucede con los enunciados completos del discurso, el registro figural no permite los pasos de la narración, los comentarios o la argumentación.

De esta manera, cuando un estudiante pasa de un enunciado a un dibujo, o de un dibujo a un texto, la coordinación entre los registros discursivos y figural supone una actividad cognitiva de conversión que remite al mismo objeto. En Richard (2004) se muestra que, para justificar ciertos pasos de razonamiento, un estudiante puede introducir un dibujo o una tira dibujada en la estructura discursiva de su prueba. De forma general, un estudiante procede en tres fases: construcción de un dibujo en un borrador, establecimiento de una conjetura y, posteriormente, la realización de una redacción de una prueba en limpio. En este caso, la problemática de la construcción es a la vez semiótica y cognitiva. A este problema de tratamiento semiótico y cognitivo se añade el de encontrar un medio de comunicar esta conjetura. La prueba escrita definitiva no permite, por tanto, examinar las relaciones sostenidas entre los distintos registros movilizados y el razonamiento subyacente.

En suma, Richard (2004) muestra los beneficios estructurales y funcionales que ofrecen los registros gráficos en la constitución de auténticos pasos de razonamiento, aunque a veces comporte riesgo en la comunicación autor-lector. La inferencia figural sería, entonces, el paso de razonamiento discursivo-gráfico que modifica el valor epistémico, semántico o teórico de la consecuencia discursiva en un razonamiento. La inferencia figural fuerza la coordinación entre registros en la realización de un paso de razonamiento estructurado que necesita, además, movilizar toda la artillería de la notación asociada a los procesos subyacentes a las cuestiones planteadas.

2.5.4 Importancia del uso de ejemplos y contraejemplos

La historia de las matemáticas muestra que los contraejemplos han jugado un papel importante en la construcción de conceptos matemáticos. De este hecho, la construcción de ejemplos y contraejemplos es una forma de actividad que conviene desarrollar en la enseñanza de las matemáticas (Benbachir & Zaki, 2001). Analizar los trabajos de Duval (2000) y Hitt (2000a; 2000b) permite observar que no sólo son importantes las tareas de transformación dentro de un registro de representación y los de conversión entre registro, sino también la confrontación entre ejemplos y contraejemplos. Selden y Selden (1998) afirman, por su parte, que el examen de ejemplos y no-ejemplos puede ayudar a los estudiantes a comprender las definiciones.

En esta misma dirección, Skemp (1980) afirma que:

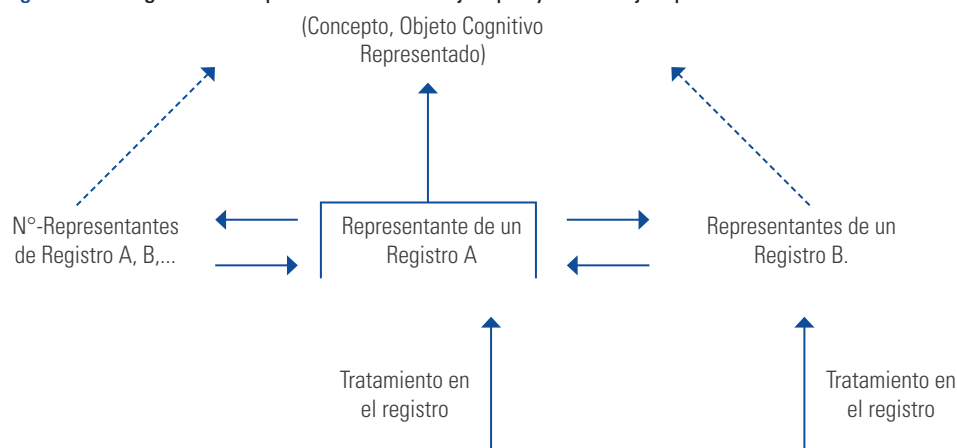
Los conceptos de un orden más elevado que aquellos que una persona ya tiene, no le pueden ser comunicados mediante una definición, sino solamente preparándola para enfrentarse a una colección adecuada de ejemplos. Sin embargo, la mayoría de los libros de texto violan este

principio y los nuevos temas se introducen no a base de ejemplos, sino por definiciones de la más admirada brevedad y exactitud para el profesor (que ya posee los conceptos a los cuales se refieren), pero ininteligibles para el estudiante (p. 36).

Bajo esta visión, un buen profesor ha de ayudar intuitivamente a construir y comprender una definición con ejemplos. No obstante, se trata de una tarea ardua, pues los ejemplos han de tener en común las propiedades que forman el concepto, pero no otras.

Para ayudar al aprendiz en la abstracción de un concepto más general a través de ejemplos son necesarios unos organizadores genéricos (González, 2005) ya que, por lo general, el estudiante tiende a construir prototipos de los conceptos a los que se enfrenta durante su aprendizaje. Es por ello por lo que se tiene que tener en cuenta el uso de ejemplos y contraejemplos en el aprendizaje de los conceptos. Un diagrama que integra lo anterior sería el siguiente:

Figura 2.6: Registro de representación de ejemplo y contraejemplo



Fuente: Duval, (2000).

Una gran proporción de los estudiantes parece capaz de encontrar soluciones correctas a preguntas de test y a exámenes recurriendo para ello a pasos y procedimientos familiares. Sin embargo, no tienen una comprensión conceptual profunda de los teoremas subyacentes y, a menudo, tienen concepciones erróneas (González, 2005). La creación de ejemplos y contraejemplos no es ni algorítmica ni procedural y requiere de un pensamiento matemático más flexible y dinámico que, a menudo, no se enseña en las escuelas. El hecho de que se pregunte por un ejemplo a un estudiante puede ser desconcertante; los estudiantes no han aprendido previamente algoritmos para ello. La mayoría de los estudiantes están acostumbrados a concentrarse en técnicas, manipulaciones y procedimientos familiares y no ponen atención a los conceptos, condiciones de los teoremas, propiedades de las funciones,

al razonamiento y la justificación. Además, están acostumbrados a confiar en la tecnología y, a veces, carecen de un pensamiento lógico y una comprensión conceptual (Tall, 1991). Conviene subrayar que la táctica general para generar ejemplos consiste en ensayo y error y que muchos encuentran muy difícil el hacer las elecciones necesarias. Sin embargo, muy pocos estudiantes producen ejemplos triviales (Selden & Selden, 1998).

En cualquier caso, no puede recaer en los estudiantes la responsabilidad de esta situación. Muchas veces, los cursos de matemáticas se desarrollan de forma que los casos especiales se evitan y los estudiantes sólo manejan funciones y ejemplos. Desafortunadamente, algunas veces estas concepciones erróneas vienen provocadas por errores e imprecisiones matemáticas en los mismos libros de textos (Klymchuk, 2001). Esta tendencia puede crear muchas falsas concepciones que se pueden explicar por medio del principio de extensión de Tall (1991): “si un individuo trabaja en un contexto restringido en el que todos los ejemplos que se consideran tienen una cierta propiedad, entonces, en ausencia de contraejemplo, la mente asume las propiedades conocidas como implícitas en otros contextos” (p. 12).

En Watson y Mason (2002) también se afirma que el aprendizaje de las matemáticas se produce, principalmente, a través de la confrontación con ejemplos, más que a través de las definiciones formales y técnicas. De hecho, afirman que es a través de los ejemplos como las definiciones cobran algún sentido, ya que las palabras técnicas matemáticas describen clases de objetos o relaciones con las que el aprendiz debe familiarizarse. Así mismo, informan de que la solicitud de ejemplos que satisfagan ciertas restricciones puede alentar a los estudiantes a extender su pensamiento más allá de los ejemplos típicos (Watson & Mason, 2002). Se observa una gran fuerza en su efectividad como estrategia de enseñanza cuando los estudiantes se enfrentan a una nueva definición. Más aún, proponen grupos de tareas que requieran que los estudiantes generen ejemplos con combinaciones dadas de propiedades. Otra posibilidad implicaría dar una lista de objetos y propiedades y pedir a los estudiantes que decidan qué propiedades aplicar a cada objeto.

Habría que mencionar también, que puede ser beneficioso para los estudiantes el hecho de presentarles los nuevos conceptos pidiéndoles que sean ellos los que generen sus propios ejemplos, o solicitándoles que decidan si los candidatos ofrecidos por el profesor son ejemplos o no-ejemplos, antes de enseñarles con ejemplos y explicaciones (Selden & Selden, 1998). Sin embargo, algunos estudiantes se resisten a implicarse tanto en la generación de ejemplos como en su uso. No se trata de una actitud sorprendente ya que la mayoría de trabajos de investigación señalan que los estudiantes encuentran muy distintas de sus clases habituales aquellas en las que se dan ejemplos y explicaciones. Es decir, existe la posibilidad de que los estudiantes muestren incertidumbre a la hora de proceder cuando se les pida ejemplos y experimenten problemas a la hora de tomar elecciones en matemáticas

(González, 2005). Una medida viable para aliviar esta reacción podría ser que los profesores de todos los niveles asignaran más problemas del tipo dame un ejemplo.

Gruenwald y Klymchuk (2002; 2003) realizaron un estudio con 600 estudiantes de 10 universidades de diferentes países en el que se preguntó acerca de la actitud hacia el método de uso de contraejemplos para eliminar concepciones erróneas y para obtener una comprensión conceptual profunda. El principal objeto del estudio era comprobar las hipótesis de los investigadores acerca de cuán efectivo es el uso de contraejemplos para una comprensión conceptual más profunda. El objetivo era eliminar algunas falsas concepciones de los estudiantes y desarrollar un entorno de aprendizaje creativo en la enseñanza del cálculo a nivel universitario. El marco teórico se basó en la noción de Piaget de conflicto cognitivo y algunos trabajos de otros autores que mostraban que el conflicto puede ser más efectivo que la instrucción directa (Gruenwald & Klymchuk, 2002). Un alto porcentaje de los participantes contestó que el método es muy efectivo y que convierte el aprendizaje de las matemáticas más estimulante, interesante y creativo; también, comentaron que el uso de contraejemplos ayuda a comprender mejor los conceptos, prevenir errores en el futuro, desarrollar un pensamiento lógico y crítico y hacer más activa la participación en las clases (Gruenwald & Klymchuk, 2003).

Cabe mencionar que, durante la instrucción, fueron los propios estudiantes, y no los profesores, quienes debían crear y mostrar contraejemplos a falsos enunciados (Gruenwald & Klymchuk, 2003). Para la mayoría de los estudiantes este tipo de actividad era completamente nuevo, estimulante e, incluso, producía incomodidad psicológica y conflictos. Los estudiantes no pudieron visualizar la diferencia entre probar qué enunciado es correcto por un ejemplo y probar su falsedad con un contraejemplo (Alcock, 2004).

Acorde a lo expuesto por Selden y Selden (1998), los estudiantes no fueron capaces de ver un simple contraejemplo como prueba de la falsedad de una conjetura. Esto puede suceder cuando un contraejemplo se percibe como el único que existe, en vez de ser visto como genérico. Por esta razón, Gruenwald y Klymchuk (2003) consideraron más productivo en la enseñanza no usar casos patológicos, sino utilizar enunciados falsos dentro del conocimiento de los estudiantes y relacionados, a menudo, con sus concepciones incorrectas más comunes.

Otro estudio relevante es el de González (2005) en el que se analizaron las tareas de transformación y de conversión entre los registro algebraico y gráfico. Su preocupación se centraba en la falta de interpretación visual de muchas cuestiones relativas a las integrales impropias. En este estudio se presentaron a los estudiantes algunos ejemplos paradójicos y contraejemplos de algunas situaciones intuitivas. Así mismo, tomaron en cuenta lo pro-

nunciado por Maschietto (2001), “el recurso a una gráfica a menudo no se considera como una prueba de pleno derecho; el estatus institucional de las gráficas obliga a completar, generalmente, un contraejemplo gráfico con una prueba analítica, por lo que se tratará de devolver su estatus matemático al registro gráfico” (p. 54).

2.5.5 El papel de la transferencia

Las aportaciones de la teoría de representación semiótica realizada por Duval (2000) se centran en las nociones de conocimiento conceptual y procedimental de Hiebert y Lawrence (1986):

Conocimiento conceptual es caracterizado claramente como conocimiento que es rico en relaciones. Puede ser pensado como conectado conformando una red de conocimiento. Conocimiento procedimental es construido por dos partes. Una se compone del lenguaje formal, o sistema de representación simbólico, de las matemáticas. La otra parte consiste de algoritmos, o reglas, para completar tareas matemáticas... En resumen, el conocimiento matemático procedimental engloba dos clases de información. Una clase de conocimiento procedimental consiste en la familiaridad con los símbolos aislados del sistema y con las convenciones sintácticas para la configuración aceptable de símbolos. La segunda clase de conocimiento procedimental consiste de reglas o procedimientos para resolver problemas matemáticos (p. 4).

El conocimiento conceptual no puede aprenderse sin significado. El conocimiento procedimental, por su parte, es dependiente del sistema de representación simbólica e implica el conocimiento de las reglas sintácticas (González, 2005). Se trata de un conocimiento que puede generarse a partir de aprendizajes rutinarios. Ambos conocimientos, el conceptual y el procedimental, están relacionados, de forma tal que el conocimiento procedimental se beneficia del conocimiento conceptual, puesto que:

- Los símbolos adquieren significado en cuanto que existe una conexión con el conocimiento conceptual que representan.
- Se retienen más fácilmente los procedimientos puesto que se encuentran conectados a una red de representaciones internas.
- Los procedimientos se pueden utilizar más fácilmente.

Dado que se aumenta el número de representaciones internas, se puede dirigir y ejecutar más eficientemente el procedimiento, se promueve la transferencia y se reduce el

número de procedimientos requeridos (González, 2005). Por otro lado, el conocimiento conceptual se beneficia del procedimental, porque los símbolos mejoran los conceptos y pueden generarlos. Más aún, el conocimiento conceptual puede convertirse en conocimiento procedimental y el uso de procedimientos puede promover el enriquecimiento de los conceptos que se estén desarrollando (Hitt, 2000).

En los primeros trabajos de Duval (2000) no se mencionan los aspectos relativos al papel de las representaciones en la resolución de problemas, a pesar de la importancia de estos conocimientos. Bajo estos aspectos teóricos (conceptual y procedimental), cobra gran importancia la noción de transferencia, que se muestra esencial en el terreno de la resolución de problemas, pues las situaciones de cada problema en las que los estudiantes se comprometen influyen en la naturaleza de las representaciones internas y en sus conexiones a otras representaciones (Hitt, 2001). Sobre este punto, Schoenfeld (1999) se plantea cómo encontrar sentido a las maneras en las que la gente usa su conocimiento en circunstancias diferentes de aquéllas en que éste fue adquirido. Del mismo modo, describe que la transferencia es indispensable en nuestra vida, que necesitamos adaptar lo que sabemos a circunstancias diferentes a las que originaron este conocimiento:

La transferencia está en todos lados (es ubiquitous). No podríamos sobrevivir si no fuéramos capaces de adaptar lo que sabemos a circunstancias que difieren, al menos en cierto grado, de las circunstancias en las que se aprendió...El punto clave es deducir qué transferencias se dieron, sobre qué base y cómo y por qué esas conexiones a veces son productivas (Schoenfeld, 1999, p. 8).

Para esta tarea, y con el fin de enriquecer el aprendizaje, se idean algunas preguntas donde se utilizan expresamente conocimiento anteriores, pero en un contexto nuevo (González, 2005). También en González (2005), se piensa que el uso de la transferencia, además de conjugar al menos dos sistemas de representación, es imprescindible para que el estudiante llegue a comprender los conceptos relativos a la integración impropia¹. Indistintamente, se sabe que algunas dificultades, obstáculos y errores asociados a la noción límite se hacen presentes cuando el estudiante maneja integrales impropias y que sólo llega, en general, a concebir este proceso como un ente estático. Quizá por eso, es necesario recurrir al conocimiento relativo a series para que pueda ser de ayuda para dinamizar estas concepciones.

¹ Es el límite de una integral definida cuando uno o ambos extremos del intervalo de integración se acercan a un número real específico a infinito positivo, o a infinito negativo. Además, una integral definida es impropia cuando la función integrando de la integral definida no es continua en todo el intervalo de integración. También se pueden dar ambas situaciones.

Con respecto a las teorías conductista del aprendizaje, en Poirier (2001) se sostiene que el aprendizaje es el resultado de una interacción entre el sujeto que aprende y su entorno (lo que sostiene una visión absoluta de las matemáticas y no toma en cuenta las concepciones previas de los estudiantes). Algunas limitaciones de esta concepción son que el estudiante que logra resolver todas las tareas intermedias de un problema no sabrá, necesariamente, resolver la totalidad de la tarea. E, incluso, si lo consiguiese, no habrá comprendido, esencialmente, la materia en estudio. Esta laguna será perceptible, entre otros, en el momento de la transferencia o de la generalización.

2.5.6 La resolución de problemas

En González (2005) se afirma que no basta con proponer actividades de conversión para pasar de un sistema de representación a otra representación de otro sistema con el fin de que el estudiante, de manera natural, construya ese puente entre representaciones. Pese a ello, la habilidad de cambiar de registro resulta fundamental en situaciones de resolución de problemas, ya sea porque otra presentación de los datos encaja mejor con un modelo ya conocido, o porque se deben poner en juego dos registros, como son las figuras y la lengua materna. Con relación al aprendizaje de la demostración, Duval (2000) afirma que es aquí donde aparece claramente la alternativa entre los objetos y conceptos matemáticos y los procesos de pensamiento implicados, siendo la demostración uno de los tópicos más difíciles en la educación matemática.

Esto se debe, en gran medida, a que las formas de mostrar por qué una proposición es cierta no son las mismas para los teoremas matemáticos que para las sentencias sobre fenómenos del mundo externo. Se podría enfatizar la necesidad de proveer no uno, sino varios métodos de prueba, o de confrontar a los estudiantes con contextos ricos epistemológicamente, como son los problemas físicos. Pero lo que realmente importa no es sólo llegar a comprender por qué tal proposición puede ser cierta, sino comprender cómo funciona la demostración en matemáticas y obtener los procesos de pensamiento implicados en la demostración.

Un concepto se va construyendo mediante tareas que supongan la utilización de diferentes sistemas de representación y promuevan la articulación coherente entre representaciones. González (2005) apunta a que el conocimiento de un individuo sobre un concepto es estable si él es capaz de articular diferentes representaciones del concepto libre de contradicciones. Así, en la resolución de problemas, las representaciones están en el corazón mismo de la actividad matemática.

Además, la articulación de diferentes representaciones del concepto libre de contradicciones tiene que ver con la transferencia (Duval, 2000). La estructura de redes internas de conocimiento es la que define el potencial para realizar transferencias. Es por esto que Hitt (2000a) afirma que es en la resolución de problemas donde se pone a prueba todo el conocimiento del estudiante. Por ejemplo, es posible que éste haya construido dos esquemas que son incompatibles y cuando esté frente a una tarea compleja, resurjan esas concepciones mal formadas produciendo un mal desempeño.

Las incoherencias existentes entre un esquema y el otro son conflictos internos al individuo que tendrá que resolver poco a poco. Algunos esquemas que tienen que ver con la noción de obstáculo epistemológico y que permiten sobrepasarlo serán más difíciles de construir (González, 2005). Una construcción correcta conlleva una red de conocimiento más amplia y coherente que opaca la vieja construcción. Ello se debe a que esta nueva construcción puede ser más fácil de recordar por la amplitud de su red (Duval, 2000). La amplitud tendrá que ver, también, con la articulación entre representaciones de un concepto (Duval, 2004). Sin embargo, esto no quiere decir que el otro esquema desaparece totalmente. En cualquier caso, no es fácil poder detectar cuándo un individuo se ha percatado de una incoherencia y la ha resuelto adecuadamente.

En la aproximación de González (2005), se reconoce también el papel activo jugado por el estudiante en su aprendizaje. El estudiante que toma una parte activa en su aprendizaje decodifica y analiza una situación a partir de las representaciones, concepciones y modelos que ha desarrollado previamente. Estas representaciones desarrolladas por el estudiante se forman a partir de imágenes mentales, de técnicas de resolución, de procedimientos y de algoritmos que provienen, en parte, de los aprendizajes anteriores. Así, si el aprendizaje reposa sobre conocimientos anteriores, puede ocurrir que una concepción dada sea insuficiente o inadecuada en un nuevo contexto. En este sentido, Bachelard (1938) afirma que el “error, no eres un mal [...]. Conocemos contra un conocimiento anterior” (p.56).

Según lo expuesto, González (2005) expresa que el conocimiento pasa de un estado de equilibrio a otro a través de unas fases instantáneas en el curso de las cuales los conocimientos anteriores son cuestionados, lo que provoca un estado de desequilibrio. Pero, ¿qué actividades plantear para provocar estas fases de desequilibrio? Se podrá, por ejemplo, presentar al estudiante problemas que le colocarán delante de un conflicto. Para ello, se elegirán problemas para los cuales los conocimientos del estudiante sean insuficientes, o se recurrirá al conflicto cognitivo: se le presentarán problemas cuyas soluciones entren en contradicción con su anticipación del resultado basada en sus concepciones. Las situaciones que favorecen un conflicto tal se denominan “situaciones-problema”.

En Poirier (2001) se plantea realizar estas actividades reconociendo la importancia de las interacciones en la clase, es decir, con una perspectiva socioconstructivista. A lo que Artigue (2001) remarca que la eficiencia de la actividad no sólo está ligada a las características del problema elegido, sino que depende enormemente del tipo de escenario desarrollado para organizar el encuentro de los estudiantes con esta nueva faceta del concepto. De forma crucial, este escenario participa del carácter social de los procesos de aprendizaje. Es a través de la discusión grupal como la estrategia inicial se invalida y es el juego colectivo el que permite encontrar una solución en un tiempo razonable. Es el juego también el que promueve algunas regularidades en la dinámica de la situación que no se podrían asegurar si los estudiantes se enfrentaran al mismo problema de forma individual o en pequeños grupos. Tampoco queda duda de que el efecto sería distinto si el profesor simplemente presentara este ejemplo particular durante una sesión de clase.

De esta forma, se lleva al estudiante a ajustar su forma de proceder a la del otro, durante la misma realización de la tarea, así como a explicar su forma de actuar o su estrategia. Todo ello es lo que le lleva a precisar su pensamiento. A partir de una confrontación de las diversas formas de proceder, se reestructura progresivamente su pensamiento y se refinan sus métodos de trabajo (González, 2005). Obviamente, la cuestión que se plantea, entonces, para el enseñante es saber cómo llevar al estudiante a pasar de una concepción inicial a una nueva concepción sobre una noción dada.

En Robert y Speer (2001) se exploran las relaciones entre la naturaleza de las tareas propuestas a los estudiantes y el éxito de éstos en su resolución. Para ello, se definen tres niveles de tareas:

- **Técnico:** se refiere a situaciones donde se pide a los estudiantes aplicar definiciones, propiedades y teoremas directamente. Las tareas en este nivel también implican el uso del lenguaje formal hasta un grado acorde al nivel escolar del estudiante.
- **Movilizable:** se refiere a una forma más amplia de aplicar el conocimiento matemático. La tarea no es de aplicación directa: se necesitan varios pasos o hay que transformar o reconocer algo para aplicar la propiedad o teorema necesario.
- **Disponible:** se refiere a la habilidad de resolver problemas sin pistas o contextos, dar contraejemplos, cambiar de métodos o utilizar conocimiento de otros campos matemáticos.

Por supuesto, estos niveles están relacionados y dependen tanto del nivel de estudio como de la experiencia de los estudiantes. Pian citado por Robert y Speer, (2001) concluye que, si es necesaria alguna adaptación de una tarea para resolverla, esto es, si la tarea se presenta en el nivel movilizable o disponible, en lugar del nivel técnico, más de la mitad de los estudiantes no podrá resolverla. Esto es consistente con una percepción general sobre

los estudiantes con facultades matemáticas a quienes, a menudo, son capaces de resolver ejercicios “imitativos”, pero no problemas que requieran transformación y reformulación (González, 2005). Para construir nuevos conocimientos, es necesario volver a poner en duda el saber adquirido. El estudiante debe darse cuenta de que sus conocimientos iniciales son insuficientes. Y una de las mejores formas de llegar a la puesta en duda del saber adquirido es la resolución de problemas: si no hay problemas que resolver, desafíos que superar, no habrá ninguna motivación para construir nuevos conocimientos (Poirier, 2001).

Si la resolución de problemas se encuentra en el núcleo de la actividad de los matemáticos, ha de ser también central en el aprendizaje y constituir una competencia importante que desarrollar (González, 2005). No obstante, es obvio que, a través de prácticas docentes estándar, los estudiantes obtienen un razonable éxito en cuestiones estándar (Artigue, 2001). Por ejemplo, si se plantea a los estudiantes cuestiones de modelización para que decidan por sí mismos si un problema requiere un proceso integral para su resolución, se quedan estancados por completo o basan sus respuestas en “pistas” lingüísticas, en caso de haberlas, que han aprendido a percibir en las versiones estándar de tales tareas. La mayoría de los estudiantes piensan que la forma más segura de enfrentarse con éxito al cálculo no es intentar comprender, sino simplemente comportarse mecánicamente. González (2005) dice que no hay que interpretar esto como una especie de fatalidad cognitiva; simplemente se observan las formas económicas de adaptación de los estudiantes a prácticas docentes inadecuadas.

Las características de un buen problema son que, para empezar, hay un objetivo que lograr y una solución que encontrar. Pero esta solución no se encuentra directamente; ésta no fluye de la aplicación de una técnica o de un simple extensor, sino de una búsqueda de la solución (Poirier, 2001). Detrás de esta idea se esconde la de un desafío razonable: para despertar el interés de los estudiantes, el problema que se plantea resolver debe presentar un desafío ni demasiado simple, ni demasiado complejo. Éstas son características de los problemas presentados por González-Martín (2005) en las que el lector sólo debe conocer las cuatro operaciones básicas para enfrentarse a los problemas propuestos, cuyo tema central son operaciones con dinero (un tema de atractivo universal), y ejercitar un pensamiento flexible. Esta modalidad de ejercicios permite comprobar que:

Poner al estudiante en una situación problema a la vez accesible y difícil que pueda llevar a término sin conocer de entrada el recorrido ni disponer por adelantado de la solución. Es cuando el estudiante experimenta el sentimiento de que puede llegar, que entrevé una hipótesis pero que no alcanza la solución aún y queda algo por hacer, que se pone en camino para abrir el secreto (Poirier, 2001, 93).

Estas definiciones hacen aparecer la naturaleza no rutinaria de la resolución de problemas, así como la relatividad del problema, sin olvidar que no para todos los estudiantes es igual el grado de dificultad (González, 2005). En González-Martín y Camacho (2004) no se menciona una definición precisa de “pregunta rutinaria” en la literatura. En Selden y Selden (1998) se hace una distinción entre problemas y ejercicios, y se identifican los problemas cognitivamente no-triviales como aquellos donde “el resolutor no comienza conociendo un método de solución y se añade que este tipo de problemas no pueden ser resueltos dos veces por el mismo individuo, pues la segunda vez éste conociera el método de resolución” (p. 45).

Una primera definición que se podría dar de “pregunta rutinaria” aparece en Monaghan, Johnson, Berry y Maull (1999) donde se define que las preguntas rutinarias pueden ser vistas como aquéllas para las que se espera que los estudiantes ejecuten un procedimiento ensayado que consiste en un número limitado de pasos. Así mismo, se ofrece una distinción entre preguntas procedurales que son aquellas que pueden ser contestadas mediante el simple ensayo de una regla, método o fórmula, y preguntas conceptuales que son las que requieren un uso del pensamiento y donde las reglas o método confiados a la memoria durante las clases podrían no ser de gran ayuda (Monaghan et al., 1999).

Acerca de estas definiciones, Hitt (2000b) caracteriza una pregunta como no rutinaria cuando “no se tiene un proceso conocido [para resolverla]” y esto motiva “el uso de diferentes representaciones del objeto matemático en consideración” (p. 59). De esta forma, González (2005) utiliza el término pregunta no rutinaria para referirse a preguntas que no son rutinarias en el sentido recién explicado y que podrían ser consideradas como cognitivamente no triviales. Obviamente, hay que tener en cuenta la relatividad de un problema, a esto Selden y Selden (1998) señala que:

Los profesores experimentados a menudo pueden predecir qué tareas particulares serán problemas para la mayoría de sus estudiantes de un curso en concreto, y que muchas tareas que sean sólo un poco distintas de los ejercicios tradicionales de los manuales pueden convertirse en problemas (p. 855).

Un buen problema promueve diversas actividades por parte del resolutor: invertir un saber antiguo, tomar conciencia de este saber que puede o no estar adaptado a la situación-problema, verificar la pertinencia de sus conocimientos y construir otros nuevos (González, 2005). En Douady (1986) se presentan las características de una situación-problema de la forma siguiente:

- La situación debe permitir un arranque. El estudiante debe poder comprometerse en la resolución del problema. Esta concepción proporciona la idea de desafío razonable.
- Si la resolución del problema necesita de una reinversión de los conocimientos anteriores, es necesario asegurarse de que los conocimientos del estudiante son suficientes. Éste es el caso, habitualmente, de los problemas situados al final de capítulo de los manuales escolares, que abordan las nociones matemáticas tratadas. Se señalan los problemas escritos para los cuales los estudiantes conocen el camino que han de seguir sin poner en movimiento todo el proceso de resolución de problemas. Si estos problemas necesitan de la adquisición de nuevos conocimientos, el estudiante no estará provisto para resolverlos inmediatamente; se encontrará entonces en un callejón sin salida y confrontado a una verdadera situación de resolución de problemas.
- La situación-problema debe permitir al estudiante decidir si la solución que ha encontrado es adecuada o no. Si no, continuará utilizando el mismo procedimiento cuando éste sea inapropiado. El enseñante llevará al estudiante a discutir con los demás sobre su solución y otras posibles. El proceso de resolución de problemas enfatiza el desarrollo del juicio, del sentido crítico y del razonamiento del estudiante por medio de las interacciones sociales. La comunicación es, por tanto, primordial en todo proceso de resolución de problemas.
- El conocimiento que se va a adquirir debe ser la herramienta mejorada, adaptada a la resolución de un problema. Por tanto, es esencial analizar el problema antes de proponerlo a los estudiantes con el fin de prever los procedimientos y dificultades de los estudiantes.

Desde esta perspectiva, González (2005) afirma que la resolución de problemas se convierte en un proceso, más que en un producto o un contenido a enseñar. Igualmente, Fuglestad (2004) señala también que la motivación es un punto crucial para conseguir que los estudiantes se metan en un problema. Ha registrado variaciones en el desempeño de estudiantes en tareas donde se necesita ver que hay un problema de interés. Los desafíos parecen más interesantes que las rutinas y que las tareas con soluciones fáciles. Las situaciones de conflicto cognitivo y los resultados sorprendentes pueden ser utilizados como elemento motivador.

2.5.7 El papel de los errores en la teoría de representaciones

En González (2005) se ha mencionado que no sólo basta con lograr actividades de conversión para pasar de una representación de un sistema de representación a otra representación de otro sistema, para que un estudiante construya de manera natural la articulación entre representaciones. Se recuerda que Bachelard resalta que es en el acto del conocimiento cuando aparecen de forma necesaria los retrocesos y problemas que van en

contra de un conocimiento anterior. Una organización de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, que presentan Socas (1997), es el siguiente:

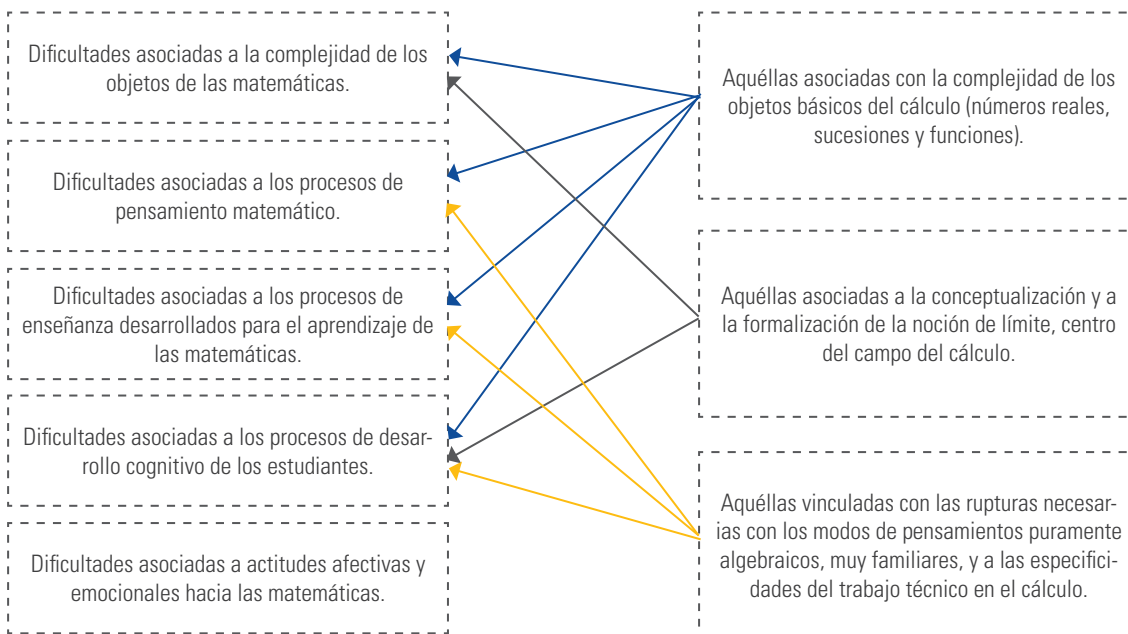
- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
- Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes.
- Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

En cuanto a las dificultades de acceso al cálculo (que son diversas y se refuerzan mutuamente en redes complejas), Artigue (1995) las agrupa en tres grandes categorías:

- Aquéllas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo (números reales, sucesiones, funciones).
- Aquéllas asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción límite, centro del campo del cálculo.
- Aquéllas vinculadas con las rupturas necesarias con los modos de pensamiento puramente algebraico, muy familiares, y las especificidades del trabajo técnico en el cálculo.

En el siguiente esquema se visualizan las relaciones descritas:

Figura 2.7: Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas



Fuente: Artigue (1995) y González (2005).

Relacionados con el concepto de función, por ejemplo, Artigue (1995) cita también que se han encontrado dificultades para articular los diferentes registros simbólicos de las expresiones de la noción de función:

Una vez más los trabajos son muchos y los resultados concordantes. Junto con las dificultades cognitivas que son reales en las conversiones de un registro a otro, o en el trabajo dentro de un mismo registro, por ejemplo, en el registro gráfico cuando se deben manejar simultáneamente dos niveles de información (informaciones sobre la función y su derivada), estas investigaciones señalan como causa de las dificultades los hábitos de la enseñanza tradicional. El gran predominio que en ella se le otorga al registro algebraico y el status infra-matemático que se le da al registro gráfico impiden manejar adecuadamente este tipo de dificultades y ayudar al estudiante a construir las flexibilidades necesarias en este nivel (Artigue, 1995, p. 110).

Todas estas dificultades se relacionan y forman redes en las que se refuerzan, concretándose en la práctica en forma de obstáculo y manifestándose en forma de errores (González, 2005). En la obra de Bachelard de 1938 que lleva por título *Formación de la mente científica*, se señalan varias causas que originan la formación de obstáculos:

- La tendencia a confiar en engañosas experiencias intuitivas.
- La tendencia a generalizar; esto puede ocultar la particularidad de la situación.
- El lenguaje natural.

En dicha investigación se propone la teoría de los obstáculos epistemológicos que pone de manifiesto una aproximación complementaria a la evolución cognitiva, centrándose en sus rupturas necesarias (González, 2005). El principio fundamental de esta teoría es que el conocimiento científico no se construye como un proceso continuo, sino que resulta a partir del rechazo de formas previas de conocimiento: los llamados obstáculos epistemológicos (Artigue, 1995). Los investigadores que utilizan esta teoría formulan la hipótesis de que algunas dificultades en el aprendizaje, generalmente las más resistentes, provienen de formas de conocimiento que son coherentes y han sido efectivas por un tiempo en contextos sociales educativos. También se formula la hipótesis de que los obstáculos epistemológicos tienen algún tipo de universalidad y, por tanto, se puede seguir su pista en el desarrollo histórico de los conceptos correspondientes.

Se ve que el concepto de obstáculo epistemológico no se refiere a las dificultades derivadas de la ausencia de conocimiento, sino a las dificultades directamente vinculadas con las formas de considerar el conocimiento o con los conocimientos mismos (Bachelard, 1938). Es aquí donde resulta importante tener en cuenta que el conocimiento científico no es resultado de un proceso continuo, sino que necesita de algunos momentos de ruptura con los conocimientos anteriores (Contreras, 2006). De esta manera, Artigue (1995) pre-

senta, por ejemplo, que la entrada en el dominio matemático del pensamiento de funciones requiere que uno se libere de la concepción estática de las matemáticas griegas que apartan de su propósito aquello que es susceptible de cambio o variación.

Los conocimientos aprendidos en la escuela pueden también transformarse en obstáculos. Así, en la extensión sucesiva de los dominios numéricos, los estudiantes generalizan espontáneamente las propiedades anteriores a los objetos nuevos, tarea que, por otra parte, les resulta ardua. A manera de modelo:

A través de la revitalización de los conocimientos construidos sobre las relaciones entre orden y operaciones, les es difícil encontrar “natural” que el cuadrado de un número pueda ser inferior al número mismo, o que una división puede producir un número más grande que el dividendo (Artigue, 1995, p. 112).

Con respecto a lo anterior, Selden y Selden (2001) llevan a cabo una clasificación de los obstáculos que surgen en la transformación de los saberes:

- **Epistemológicos:** surgen a partir de la naturaleza de aspectos particulares del conocimiento matemático.
- **Cognitivos:** surgen de la cognición de un individuo sobre un tópico matemático concreto.
- **Didácticos:** surgen a partir de características particulares de la enseñanza de las matemáticas.

González (2005) expresa que, a nivel universitario, esta aproximación de obstáculo ha sido utilizada fructíferamente en la investigación relativa al límite. A este respecto, resulta interesante observar que en la investigación de Schneider (1991) se aborda este concepto de obstáculo epistemológico, principalmente:

- El significado cotidiano de la palabra límite que induce concepciones resistentes del límite como una barrera, como último término de un proceso, o como elemento que tiende a restringir la convergencia a la convergencia monótona.
- La sobre generalización de propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos, siguiendo el principio de continuidad enunciado por Leibniz.
- La fuerza de la geometría de las formas que impide a los estudiantes identificar claramente los objetos implicados en el proceso de límite y su topología subyacente. Esto hace que para los estudiantes sea difícil apreciar la interacción sutil entre los marcos numéricos y geométricos en el límite de una función.

En Socas (1997) se proporcionan algunas características del concepto de obstáculo de la siguiente manera:

- Un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento.
- Tiene un dominio de eficacia. El estudiante lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto.
- Cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto, genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas.
- Es resistente y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
- Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándose.

Entre los tipos de errores más frecuentes podemos mencionar los producidos por la enseñanza o la forma que se enseña y los de corte epistemológico (Contreras, 2006). Con periodicidad, los errores se manifiestan durante la manipulación de una representación dentro de un mismo sistema de representación, que generalmente es el algebraico. Otro tipo de error se puede presentar cuando hay una elección inadecuada de un sistema semiótico al resolver un problema matemático. De la misma manera, Duval (1993) expresa que muchas de las dificultades encontradas por los estudiantes en diferentes niveles de su currículo pueden ser descritas y explicadas como una falta de coordinación de registro de representación. En trabajos más recientes, Duval (2004) habla del obstáculo de la conversión:

La conversión puede ser requerida explícitamente en la resolución de problemas, pero también se requiere implícitamente cuando dos registros deben ser movilizados juntos de forma interactiva o paralela. Los datos empíricos muestran que hay dos factores principales que determinan el obstáculo de la conversión. El primero es la no-congruencia entre dos contenidos de representación del mismo objeto: ambos son más o menos opacos para el otro. El segundo es la no-reversibilidad de la conversión. Solo tenemos que invertir la dirección del cambio de registro para ver a los que aprenden dejar de reconocer los objetos representantes. Esto excluye cualquier explicación del obstáculo de la conversión como debido a una carencia de conceptos matemáticos (p. 70).

En González (2005) se ha mencionado la construcción inadecuada de un concepto. Esta deficiente construcción se puede deber a una carencia de articulación entre diferentes registros semióticos de representación. También se cree que muchos de los malentendidos que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas están relacionados con

la falta de estructuras cognitivas que le permitan realizar las conexiones necesarias en la resolución de un problema, o para ir más allá, de un problema resuelto.

Un obstáculo cognitivo se produce frecuentemente cuando un sujeto, al enfrentarse a un problema, evoca representaciones contradictorias del concepto en cuestión, posiblemente a causa de ideas intuitivas erróneas, en muchos casos incluso necesarias, construidas en el proceso de formación de concepto (Schneider, 1991). Desde este punto de vista, el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas deberá promover mejores articulaciones entre representaciones de tal forma que la red interna que se esté formando en el sujeto le permita contrastar e intentar disminuir la fuerza de ese conocimiento detectado e identificado como obstáculo epistemológico.

2.6 TEORÍAS SOCIOCULTURALES DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Las teorías socioculturales en educación matemática surgen precisamente del énfasis en una concepción del conocimiento matemático como proceso social y cultural (Lerman, 2006). Sierpinska y Lerman (1996) incluyen en su revisión de las epistemologías de la educación matemática una síntesis de visiones socioculturales aplicadas a nuestro campo de investigación. De acuerdo con estos autores, la etiqueta 'sociocultural' se emplea para localizar a un individuo situado dentro de una cultura y siendo participante de situaciones sociales. Por ese motivo, deja de tener sentido hablar del individuo o de conocimiento a menos que sea visto a través del contexto o de la actividad. Conocimiento es conocimiento cultural considerado como socialmente producido, siempre potencialmente cambiante, que trabaja con valores sociales y regulado socialmente.

El contexto social de la clase de matemáticas es una de las características de las tendencias cambiantes en la investigación en educación matemática. El papel jugado por el contexto social en el desarrollo de los individuos o de los grupos ha sido teorizado implícita o explícitamente, de muchas formas. Todo ello es indicativo de los intereses actuales en llevar a cabo un desplazamiento desde la identificación de factores sociales sobre el dominio de lo afectivo, a una preocupación con la parte que en el entorno social y cultural juega, como un todo, en el desarrollo del aprendiz (Godino, 2010). En Lave citado por Godino (2010) se desarrolló la noción de conocimiento-en-acción en contraste a una perspectiva cognitiva, y se localizó a las matemáticas en diversos contextos en los que actúan las personas. En este trabajo también se visualiza el estudio sobre las prácticas matemáticas en situaciones de la vida diaria y de los lugares de trabajo. Así mismo, se menciona la importancia de las matemáticas escolares y su orientación hacia técnicas y destrezas generalizables que se suponen aplicables a la vida diaria.

En cambio, Vygotsky y sus colaboradores, estuvieron interesados de forma prioritaria en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De tal modo, Vygotsky no trata la naturaleza de las matemáticas o cualquier otra forma de conocimiento: excepto para la psicología, que intento redefinir y reestructurar como una ciencia materialista (Godino, 2010). Vygotsky se interesó por la naturaleza de la conciencia y, en particular, por su desarrollo. Para él, la comunicación conduce a la conciencia y, por tanto, el proceso de aprendizaje es integral para la comunicación. También identificó dos tipos de pensamiento: pensamiento ordinario o espontáneo y pensamiento científico o teórico. Este último es el que pretende, de modo consciente, la enseñanza y el aprendizaje mediante la apropiación que lleva a cabo el aprendiz del conocimiento cultural. El aprendizaje es el que se logra de manera informal por medio de las interacciones del aprendiz con los compañeros y los adultos (Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2007).

La zona de desarrollo próximo, identificada por Vygotsky, marca la diferencia entre lo que un niño podía hacer por sí mismo y lo que podía hacer con la ayuda de un compañero o un adulto experimentado. Este concepto fundamental estableció que todo el aprendizaje tiene lugar con otros, y que el aprendizaje tira de cada persona, de modo que lo que ve hacer a otros hoy, lo hará con ellos mañana y lo hará solo después. La idea de que el aprendizaje conduce al desarrollo, planteada por Vygotsky, contrasta directamente con los planteamientos de Piaget para quien el desarrollo, en la forma de estadios de desarrollo del niño, conduce al aprendizaje. Para Vygotsky, el proceso de internalización es otra característica del pensamiento. El proceso de internalización no es la transferencia de un plano de conciencia externo a otro interno preexistente, sino que se trata del proceso en que este plano se forma (Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2007). Por tanto, tiene lugar una unificación de la enseñanza preexistente.

Una característica importante de la aproximación de Vygotsky es en el sentido de que el mundo, y los individuos dentro de él, son productos de su tiempo y lugar. En especial la psicología del individuo, expresada como conciencia, se forma mediante la mediación de herramientas que son expresiones de la situación social, histórica y cultural (Font, 2002). Esto lleva a considerar al sujeto y al objeto juntos, y se supera, así, la dualidad cartesiana (Godino, 2010). Esto implica que no hay fundamentos para afirmar que existe un paralelismo entre los obstáculos epistemológicos en matemáticas y los obstáculos cognitivos en el aprendizaje. Por ejemplo, según la historia de las matemáticas, el concepto de número negativo estuvo cargado de obstáculos epistemológicos; muchos matemáticos, incluso hasta el siglo XIX, eran reacios a aceptar el concepto. Ahora, se consideran los números negativos como parte de los enteros, y los niños pueden aprender su naturaleza sin tener que recrear esa historia parcial. No hay ninguna razón, excepto una hipótesis *a priori*, de porqué debería haber un paralelismo similar (Wilhelmi, Font, & Godino, 2005).

En términos de investigación, la aproximación más desarrollada acorde con esta línea ha sido la denominada teoría de la actividad. Igualmente, Vygotsky señaló la centralidad de la noción de la persona actuante y enfatizó “el significado” como la mediación entre el individuo y el mundo (Godino & Batanero, 1994). La sociedad y la cultura son mediatizadas para el niño por medio de herramientas que son, particularmente, culturales. Sobre todo, el pensamiento y el lenguaje tienen que verse como dialécticamente relacionados. El lenguaje ofrece al niño significados histórico-culturales heredados, pero cada participante en una conversación o en otra actividad usa aquellas herramientas intersubjetivamente para reconfigurar los significados en la comunicación y la acción (Godino, 2010).

Desde la perspectiva de Leontiev, la actividad orienta a los participantes y les proporciona el significado y la motivación inicial (Godino, 2011). Los significados están socialmente centrados, mientras que el sentido viene dado por la perspectiva del individuo. Las acciones de los individuos dentro de la actividad están siempre motivadas por el sentido, que incorpora cognición, cultura y afecto (Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2007). Finalmente, existen las operaciones o los movimientos específicos que hacen los individuos en respuesta a fenómenos específicos.

Con el término de teoría sociocultural se propone, así, un acompañamiento al constructivismo social, por delante de los posicionamientos más psicológicos y cognitivos donde el conocimiento matemático es, sobre todo, visto como producto mental e individual (Ernest, 1998). Aunque todas las teorías socioculturales comparten la visión sobre la construcción social del conocimiento matemático, hay diferencias significativas dentro de ellas.

Es, por ejemplo, de gran relevancia mencionar la corriente de educación matemática crítica de Skovsmose (1994) y la etnomatemática liderada por D’Ambrosio (1985) que parten de una perspectiva histórica-antropológica basada en el trabajo de campo etnográfico y en el estudio de la cultura matemática de grupos específicos. Un tercer enfoque denominado corriente discursiva en educación matemática, que a su vez da lugar a otros enfoques como el interaccionista, trabajado por Cobb (1994) y Krummheuer (2007). Un cuarto enfoque, es el asociado a la educación matemática realista de Freudenthal (1991).

Finalmente, la socioepistemología propone estudiar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple. El origen de esta visión está en los trabajos de Cantoral y Farfán (2003) en los que se presenta la socioepistemología no sólo como una visión ampliada de la epistemología que resalta la relatividad socioepistémica de los significados de los objetos matemáticos en concordancia con otras visiones socioculturales, sino como una manera sistémica de afrontar el estudio de las interacciones entre esta visión de las matemáticas con las dimensiones cognitiva e instruccional.

Esta corriente examina el conocimiento matemático considerándolo como social, histórico y culturalmente situado, problematizado a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión (Cantoral, Farfán, Lezama, & Martínez-Sierra, 2006). Además de asumir como esencial la actividad humana resolviendo problemas como origen de las matemáticas, considera necesario explicitar el componente sociocultural en la construcción del conocimiento matemático, el papel de las herramientas utilizadas y la diversidad de significados atribuible a los objetos matemáticos (Godino, 2011).

2.7 CONCLUSIONES

A lo largo de este capítulo se han revisado las distintas perspectivas teóricas en la didáctica de las matemáticas y se han efectuado comparaciones entre estos modelos teóricos. De manera sintetizada, se visualizan los aspectos que relacionan a estas teorías en la siguiente tabla:

Tabla 2.2: Perspectivas teóricas en didáctica de las matemáticas

Perspectivas teóricas en didáctica de las matemáticas	
Situaciones didácticas	Situación. Conocimiento. Saberes matemáticos. Modelo implícito de concepción. Sentido de un conocimiento. Formas de conocimiento (ligadas a situaciones de acción, formulación y validación).
Antropológica	Tarea (problemática), praxeología u organización matemática (puntual, local regional, global). Praxis (tarea; técnica). Logos (tecnología; teoría). Transposición didáctica.
Campos conceptuales	La noción de esquema. La noción de concepto. La noción de campo conceptual. La noción de sentido. La noción de concepción.
Funciones semióticas y representación semiótica	Los signos. La comprensión de los conceptos matemáticos. Los registros de representación semiótica. El uso de ejemplos y contraejemplos. El papel de la transferencia. La resolución de problemas. El papel de los errores en la teoría de representaciones.
Visiones socioculturales	Educación matemática crítica. La etnomatemática. Interaccionismo simbólico en didáctica de las matemáticas. La fenomenología didáctica. La socioepistemología

Fuente: Elaboración propia.

Estos fundamentos teóricos mostrados justifican el fin específico de la didáctica de las matemáticas, como campo de investigación, así como algunas características de las nociones teóricas que componen un enfoque ontológico y semiótico del conocimiento y la instrucción matemática. También ayudan a caracterizar los fenómenos didácticos en los diferentes niveles de análisis de las diversas dimensiones o facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Ahora bien, ¿son suficientes estas perspectivas teóricas para el análisis didáctico de las matemáticas? Consideramos que es necesario diseñar otras nuevas teorías y metodologías más eficaces, enriqueciendo algunas nociones ya elaboradas, evitando redundancia y conservando una consistencia global. Es por ello que, en este trabajo de Tesis Doctoral, se dedica un capítulo al reconocimiento de la diversidad en la didáctica de las matemáticas, teniendo en cuenta que, reconocer la diversidad en la clase de matemáticas permite aprovechar los distintos saberes que se encuentran en el aula, incorpora los contextos socioculturales a los procesos de enseñanza y aprendizaje y permite expandir los elementos de resolución de problemas para hallarle sentido a los aprendizajes que, posteriormente, se transfieren a la vida cotidiana. El profesor es un diseñador, un arquitecto que va construyendo y solidificando su interacción con los grupos, facilitando aspectos disciplinares de las matemáticas y el respeto a las dinámicas que se van generando.

De este modo, la idea de una matemática para todos implica metodologías transformadoras, acordes con los tiempos y, sobre todo, que incluyan a todas las voces. Por tanto, se debe aspirar a incluir un sistema de nociones teóricas y metodológicas para investigar la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para poblaciones en contexto de diversidad.

CAPÍTULO 3:

ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

“La educación matemática puede ser interpretada como parte de una lucha simbólica y es importante subrayar que una condición, para la comprensión de lo que se lleva a cabo en este tipo de educación es no creer en nuestros propios ojos. Que parece suceder lo que no sucede y lo que sucede es difícil de ver” (Skovsmose, 2002, p. 383).

3.1 INTRODUCCIÓN

El fin específico de la didáctica de las matemáticas, como campo de investigación, es el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de programas de mejora de dichos procesos. La teoría de la educación matemática propuesta por Steiner visualiza el desarrollo de una aproximación comprensiva a la educación matemática, que debe verse, en su totalidad, como un sistema interactivo que comprende investigación, desarrollo y práctica (Steiner, 1984).

Para lograr este objetivo, la didáctica de las matemáticas debe considerar las contribuciones de diversas disciplinas como la psicología, la pedagogía, la filosofía o la sociología. Además, debe tener en cuenta y basarse en un análisis de la naturaleza de los contenidos matemáticos, su desarrollo cultural y personal, particularmente, en el seno de las instituciones escolares.

Este análisis en la didáctica de las matemáticas se denomina enfoque ontosemiótico, el cual es esencial, porque explica, desde un punto de vista pragmático, semiótico y antropológico, los fenómenos que se producen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es pragmático puesto que propone una formulación del significado de los objetos matemáticos que asume los presupuestos de la epistemología pragmática: “las categorías opuestas de sujeto y objeto pasan a un segundo plano, al asignárselas un estatuto derivado, ceden su lugar privilegiado a la categoría de acción” (Faerna, 1996, p. 14).

Se habla de una perspectiva antropológica, porque su principal objeto de estudio es el hombre aprendiendo en instituciones escolares, y las matemáticas son el resultado de una construcción social realizada en diferentes instituciones. Por último, se dice que es semiótico porque atribuye un papel central a los recursos expresivos utilizados en la actividad matemática.

A continuación se puntualizan, de manera breve, algunos de los constructos del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: significado institucional y personal de los objetos matemáticos; las nociones de objeto institucional y personal; la comprensión y la evaluación de los conocimientos; la configuración de objetos matemáticos y facetas duales; los procesos metacognitivos en el enfoque ontosemiótico; y los constructos del enfoque ontosemiótico utilizados en la resolución de problemas.

3.2 SIGNIFICADO INSTITUCIONAL Y PERSONAL DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

A partir de una consideración de que “el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico” (Godino, 2003), el enfoque ontosemiótico toma como punto de partida la teoría antropológica, específicamente las nociones de praxemas y de objetos. Para Chevallard (1997) praxema corresponde a los objetos materiales ligados a las prácticas y usa esta noción para definir el objeto como un emergente de un sistema de praxemas, más concretamente:

“un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se dibuja (grafismo, formulismo, cálculos), es decir registro escrito” (Cobo, 2003, p. 33).

Estas nociones teóricas son la base de los constructos del enfoque ontosemiótico, pero Godino y Batanero (1994) proponen hacer de estas nociones más operativas y refinadas –en consonancia con los supuestos pragmáticos de las teorías de significado–, mostrando, además, sus semejanzas, diferencias y relaciones con otras herramientas conceptuales como, por ejemplo, las de concepción y significado. Por tanto, consideran necesario precisar las nociones de práctica y de objeto, así como un uso técnico de la noción de significado que sea útil en los estudios psicológicos y didácticos. Además, se interesan por reconocer, explícitamente dentro del componente discursivo, los conceptos, proposiciones y argumentaciones, así como el lenguaje y los objetos ostensivos en la terminología de la teoría antropológica (Godino, 2003).

El enfoque ontosemiótico reconoce la distinción e interdependencia entre la esfera de lo personal y de lo institucional como ejes principales de la antropología cognitiva. No obstante, también alerta de un énfasis excesivo en lo institucional que puede llevar a prescindir de la esfera de lo mental y, por extensión, de los fenómenos relacionados con el aprendizaje del sujeto (Rocha, Cajaraville, & Labraña, 2008). De ahí que la consideración explícita de este dominio lleve a los investigadores a diferenciar entre objeto institucional (conocimiento objetivo) y objeto personal/mental (conocimiento subjetivo). Por ello, las prácticas y sus relaciones con los objetos están organizadas en torno a una finalidad: adoptar decisiones y resolver situaciones problemáticas. Consecuentemente, se considera necesario tomar como noción primitiva la de situación-problema.

Como resultado de estos planteamientos Godino y Batanero (1994) se interesan por elaborar una ontología simple de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el cuádruple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Es decir, proponen como objeto básico para el análisis, los sistemas de prácticas manifestados por un sujeto, o por el seno de una institución, ante una clase de situaciones-problemas (Godino, 2002). Así, a partir de la noción de situación-problema, Godino y Batanero (1994) definieron los conceptos teóricos de práctica, objeto personal e institucional, y significado tanto personal, como institucional, para hacer operativo ese triple carácter de las matemáticas y la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, y su mutua interdependencia.

3.2.1 El concepto de problema

Godino (2003) compara dos definiciones del concepto de problema. La primera de ellas explica el problema como una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución. La segunda, argumenta que un ser humano se enfrenta a un problema cuando intenta efectuar una tarea, pero no puede llevar a cabo.

Estas definiciones son generales y se refieren a problemas de cualquier índole. No obstante, el interés expresado en estas palabras es “dilucidar las características de los problemas o situaciones de una cantidad desconocida, tomando como objeto matemático la media” (Godino, 2003, p. 8). Lo observado por Godino puede extenderse a cualquier problema. Es decir, que en el enunciado de una cuestión y en el desempeño de las tareas correspondientes intervengan objetos matemáticos diversos. Asimismo, se hace necesario precisar, entre otras cosas a) la búsqueda, dentro del campo de problemas, de lo esencial entre los distintos contextos, b) las relaciones con otras situaciones y c) la actividad de matematizar (Rocha, Cajaraville, & Labraña, 2008).

Las actividades de matematización son aquellas dirigidas a buscar soluciones que no son accesibles en el momento, a comunicar la solución a otros, y a justificarlas. El hecho de relacionar un problema y su solución con otras situaciones y contextos, con el objeto de generalizar, simbolizar y validar la solución, fue descrita por Freudenthal, en 1991, como actividad de matematizar (Godino & Batanero, 1994; Godino 2003).

3.2.2 La noción de práctica

Una de las primeras nociones introducidas en el marco del enfoque ontosemiótico fue la de práctica. El desarrollo de esta noción tuvo como meta principal caracterizar las

actividades de matematización; por tanto, una práctica se define como toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas (Godino & Batanero, 1994). En Rocha, Cajaraville y Labraña (2008) se afirma que es observable que en las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales y abstractos, los cuales pueden estar representados en forma textual, oral, gráfica o, incluso, gestual. Son estos mismos objetos ligados a la práctica que Chevallard (1991) denominó praxemas.

Godino y Batanero (1994) muestran un mayor interés por los tipos de invariantes operatorios puestos de manifiesto por las personas en su actuación ante situaciones problemáticas que una práctica particular en un problema concreto dado. A estos invariantes les llaman “prácticas prototípicas pueden ser asociadas a cada campo de problema y a cada persona” (Godino & Batanero, 1994, p. 8). También presentan la noción de práctica personal significativa y, en ese sentido, proporcionan la siguiente definición:

“una práctica personal es significativa (o que tiene sentido) si, para la persona esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otra la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino & Batanero, 1994, p. 9).

El carácter subjetivo con que se dota la definición de práctica, lleva a diferenciar entre prácticas personales y prácticas institucionales. Mientras que las primeras pueden variar de un sujeto a otro, las segundas son compartidas socialmente en una misma institución (Serrano, 1996). Cabe mencionar que en el enfoque ontosemiótico se considera que no se pueden interpretar las conductas observables de los estudiantes si no les atribuimos una finalidad. De ahí la distinción que se hace entre conducta humana, que es el comportamiento aparente y observable, y práctica o acción humana orientada a un fin (Rocha, Cajaraville, & Labraña, 2008).

3.2.3 La noción de institución

En Rocha, Cajaraville y Labraña (2008) se apunta a que en la sociología se suelen considerar las instituciones básicamente desde dos perspectivas. La primera tendría que ver con la configuración de un conjunto de prácticas compartidas y la segunda las entiende como una organización que se compone de un cuerpo directivo, un edificio y unos trabajadores, y está destinada a servir a algún fin socialmente reconocido y autorizado. Es evidente que las instituciones escolares encajan claramente en estas dos maneras de entender las instituciones.

El enfoque ontosemiótico se interesa, sobre todo, por la primera manera de entender la institución, sin que esto implique no tener en cuenta el otro punto de vista. Dado que las situaciones problemáticas y sus soluciones son socialmente compartidas en el seno de instituciones, las nociones de institución y de sistemas de prácticas sociales se definen de la siguiente manera:

“una institución (I) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen” (Godino & Batanero, 1994, p. 9).

Se llama institución matemática (M) a las personas que en el seno de la sociedad están comprometidas en la resolución de nuevos problemas matemáticos. Se trata de los productores del saber matemático. Otras instituciones involucradas con situaciones matemáticas son los utilizadores del saber matemático, o matemáticos aplicados, y los enseñantes del saber matemático reciben el nombre de escuela del saber matemático (Godino & Batanero, 1994).

En el seno de las distintas instituciones, el enfoque ontosemiótico se interesa por el conjunto de prácticas que tienen por objeto lograr la solución del correspondiente campo de problemas, analizadas desde una perspectiva sistémica para indagar su principio organizativo (Rocha, Cajaraville, & Labraña, 2008). De ese modo, surge la siguiente conceptualización:

“sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas: Está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I. Este sistema es representado por la notación ”(Godino & Batanero, 1994, p. 10).

Entre los tipos de prácticas sociales, Rocha, Cajaraville y Labraña (2008) mencionan los descriptores de problemas o situaciones, las representaciones simbólicas, las definiciones de objetos y las argumentaciones.

3.3 LAS NOCIONES DE OBJETO INSTITUCIONAL Y PERSONAL

Las nociones de objeto institucional y personal, que distintas personas comparten en una práctica matemática en diversas situaciones problema, llevó a Godino y Batanero (1994) a definir lo que es un objeto institucional y un objeto personal, así como a establecer

una relación con el significado institucional y personal de un objeto; el significado y sentido de un objeto; y sus tipos de significados. A continuación se detallan estos elementos.

3.3.1 Objeto institucional

Los productos globales de las actividades que forman un sistema disponen de cualidades propias que retroactúan sobre las actividades mismas del sistema del que se vuelven inseparables. Es de esta manera como Morín (1977) llega a la definición de la noción de emergencia. Dicha conceptualización es empleada por Godino y Batanero (1994) para puntualizar que el objeto matemático “media” se presenta como un ente abstracto que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos.

En el contexto de las prácticas socialmente compartidas, se observa que éstas pueden variar en las distintas instituciones y, en vista de eso, se aclara que se ha de conceder al objeto una relatividad respecto a las mismas prácticas (Rocha, Cajaraville, & Labraña, 2008). Así que, recurriendo a la máxima pragmática de que un objeto institucional implica la generación de una regla de comportamiento compartida por toda la institución, se define éste de la siguiente manera:

“Objeto Institucional (O): es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de . Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de ” (Godino & Batanero, 1994, p. 11).

En este sentido, Rocha, Cajaraville y Labraña (2008) afirman que la emergencia del objeto es progresiva a largo del tiempo y, en un momento dado, es reconocido por la institución, nombrado, generalizado o modificado, o bien empleado para resolver otros campos de problemas, según se va ampliando el campo de problemas asociados.

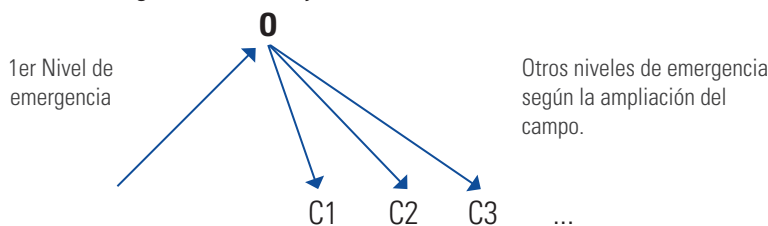
“El objeto institucional puede conceptualizarse también como signo de la unidad cultural constituida por ” (Godino & Batanero, 1994, p. 336) y, según apunta Ernest (1991), es constituyente del conocimiento objetivo. “Si la institución de I es la institución matemática M, el objeto institucional recibirá el nombre de objeto matemático (pueden ser conceptos, proposiciones, teorías.)” (Godino & Batanero, 1994, p. 337). En relación con la emergencia se enfatiza:

“De un campo de problema pueden emerger diversos objetos que, como consecuencia, están mutuamente relacionados. Por otra parte, los mismos objetos institucionalmente reconocidos son fuente de nuevos

problemas y pueden usarse como herramientas en la resolución de nuevos problemas y pueden ser usados como herramientas en la resolución de otros (Godino & Batanero, 1994, p. 338).

En conformidad con Font (2005), la emergencia del objeto se puede retratar con la siguiente ilustración:

Figura 3.1: Emergencia de un objeto



Fuente: Rocha, Cajaraville y Labraña (2008).

Como consecuencia de los presupuestos pragmáticos en que se basan, para un análisis antropológico de los fenómenos cognitivos y didácticos, Godino y Batanero (1994) defienden la existencia cultural de distintos objetos, según la institución de referencia, en situaciones donde la concepción absolutista de las matemáticas ve un único objeto.

3.3.2 Objeto personal

En Font y Ramos (2005) se compara la relación entre las prácticas y los problemas que las suscitan como una “relación estímulo-repuesta”. También se considera que en el medio de esta relación tienen lugar los objetos matemáticos personales. O sea, que entre el estímulo (campo de problemas) y la respuesta (sistema de prácticas) hay un lapso “donde tiene lugar el proceso de simbolización por el que las experiencias se procesan como signos, y éstos se manipulan y combinan, siguiendo reglas y métodos, dando lugar a dichos objetos que además tiene el matiz de conciencia subjetiva” (Font & Ramos, 2005, p. 320). En ese plano, Godino y Batanero (1994) proponen las nociones de sistema de prácticas personales y de objeto personal, definidas éstas de la siguiente manera:

Sistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas; está constituida por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C . Se representa este sistema por la notación $\langle \cdot \rangle$. Objeto Personal; es un emergente del sistema de prácticas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de (Godino & Batanero, 1994, p. 339).

Ernest (1991) afirma que la emergencia del objeto es progresiva y tiene en cuenta la historia del sujeto, sus experiencias y aprendizajes, y es el constituyente del conocimiento subjetivo.

3.3.3 Significado institucional y personal de un objeto

En Godino y Batanero (1994) se dice que los objetos son nombrados y descritos mediante ciertas prácticas intensivas que suelen considerarse como definiciones del objeto e, incluso, se identifican con el objeto mediante un fenómeno metonímico. De acuerdo con Vergnaud (1990), se observa que el significado de un objeto matemático, desde un punto de vista didáctico y psicológico, no puede quedar reducido a su mera definición. Aún más:

Son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en las situaciones ni en las representaciones simbólicas. Es una relación del sujeto con las situaciones y los significados. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o un significante lo que constituye el sentido de esta situación o este significante para el individuo (Vergnaud, 1990).

En este sentido, “el significado de los objetos matemáticos debe estar referido a la acción (interiorizada o no) que realiza un sujeto en relación con dichos objetos” (Godino & Batanero, 1994, p. 338). Así, se resalta también la necesidad de diferenciar la dimensión personal e institucional para el significado.

En relación al caso de la “media”, sirve igualmente para ilustrar la dimensión institucional si se explicita el tratamiento que se da a este objeto en relación a los currículos oficiales de la educación secundaria, la educación superior y en la vida cotidiana en la que lo esencial no son las propiedades o definiciones de un objeto (en este caso, matemático), “sino que es su uso como herramienta de análisis y toma de decisiones en cierto tipo de situaciones problemáticas” (Godino & Batanero, 1994, p. 339).

Este hecho, permite llevar a cabo la siguiente definición:

El significado de un objeto institucional O_i es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto institucional O_i en un momento dado. Se trata de un constructo relativo a la institución, y dependiente estocásticamente del tiempo. Simbólicamente, para un tiempo t y una institución I : $S(O_t)=P_t(C)$ (Godino & Batanero, 1994, p. 340).

Como se mencionó anteriormente, en $I=M$, se hablaría del significado matemático de un objeto. De ese modo, esta noción introduce en la problemática epistemológica y didáctica los sistemas de prácticas sociales así como los objetos matemáticos que de ahí emergen; así como el análisis semiótico de los objetos institucionales que implica la consideración de las situaciones problemáticas y de los objetos que intervienen en la resolución misma (Rocha, Cajaraville, & Labraña, 2008). Es decir, conlleva la consideración de la dimensión subjetiva del significado.

De este modo, la noción de significado de un objeto personal O_p es introducida en correspondencia con la noción de significado de un objeto institucional desde el siguiente punto de vista:

El significado de un objeto personal O_p : es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto personal O_p en un momento dado. Depende, por tanto, del sujeto y del tiempo estocásticamente. De un modo simbólico, $S(O_p)=P_p(C)$ (Godino & Batanero, 1994, p. 340).

A este respecto, según Godino y Batanero (1994), una parte del significado es observable, aunque no lo son directamente las prácticas constituidas por acciones interiorizadas.

3.3.4 Significado y sentido de un objeto

La emergencia progresiva de los objetos matemáticos institucionales pone en evidencia la necesidad de marcar la diferencia entre sentido y referencia de un término. Esta idea se resalta en Font (2005) quien se apoya en las ideas de Frege (1998), el cual señala que “la referencia será el objeto matemático nombrado, mientras que el sentido es la manera de presentación” (p.112). Rocha, Cajaraville y Labraña (2008) ilustran esa diferencia con el ejemplo de la “mediatriz”: se puede definir la “mediatriz de un segmento” como la perpendicular que pasa por el punto medio, o como el lugar geométrico formado por todos los puntos equidistantes de los extremos. Se tiene el concepto de “mediatriz” relacionado con dos conceptos diferentes como son, por ejemplo, el “punto medio” y el “lugar geométrico”. Sin embargo, se tratan de la misma referencia y poseen sentidos distintos ya que la manera de presentación de conexión con otros conceptos es diferente. “Entender que las dos definiciones son equivalentes informa de que dos definiciones, que se podrían considerar definiciones de objetos diferentes, se refieren al mismo objeto (Rocha, Cajaraville, & Labraña, 2008, p. 24).

Al hilo del concepto de “mediatriz”, en Font (2005) se explicita que en su definición se puede generar un conjunto de prácticas. Tenemos el objeto “mediatriz” relacionado a otros objetos diferentes y con procedimientos de construcción distintos, lo que marca diferentes situaciones y prácticas. Se visualiza que el objeto matemático institucional es un emergente de un sistema de prácticas y que su significado se define, igualmente, en términos de prácticas. En palabras de Godino (2002), se describe el significado de la siguiente manera: $S(O)=\{\text{Conjunto de prácticas } P_i, \text{ tal que en cada práctica } P_i \text{ la institución utiliza el objeto } O\}$. En una perspectiva pragmática, el significado de un objeto matemático queda ligado a otros significados y objetos, puesto que en las prácticas interviene dicho objeto y otros objetos más (Rocha, Cajaraville, & Labraña, 2008).

Este hecho hace que en el marco del enfoque ontosemiótico se distingan los términos de sentido y significado.

“Puesto que el objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, etc. Para dar lugar a diferentes prácticas, en el enfoque ontosemiótico se entiende el sentido como un subconjunto del sistema de prácticas que constituyen el significado del objeto” (Font, 2005, p. 113).

Y ya en relación al significado, Font (2005) observa que el significado de un objeto matemático es entendido como:

“un sistema de prácticas, se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a producir sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no produce todos los sentidos” (Font, 2005, p. 113).

En este contexto, Rocha, Cajaraville y Labraña (2008) apuntan a que un objeto matemático con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Es decir, que en cada nuevo programa la actividad de resolver nuevos problemas, aplicar nuevas técnicas, utilizar nuevas representaciones, etc., genera, con el paso del tiempo, la aparición de nuevas prácticas o sentidos que van ampliando el significado del objeto. Esta manera de entender los objetos y su significado supone que la institución o la persona dispongan de prácticas con respecto al campo de experiencias que el objeto abarca.

3.3.5 Tipos de significado

Desde la perspectiva de la instrucción matemática, se consideran diferentes tipos de significados institucionales y personales. En Godino (2003), Font (2005) y Font y Ramos (2005) se relaciona a lo institucional con el punto de vista del profesor en base a los siguientes aspectos:

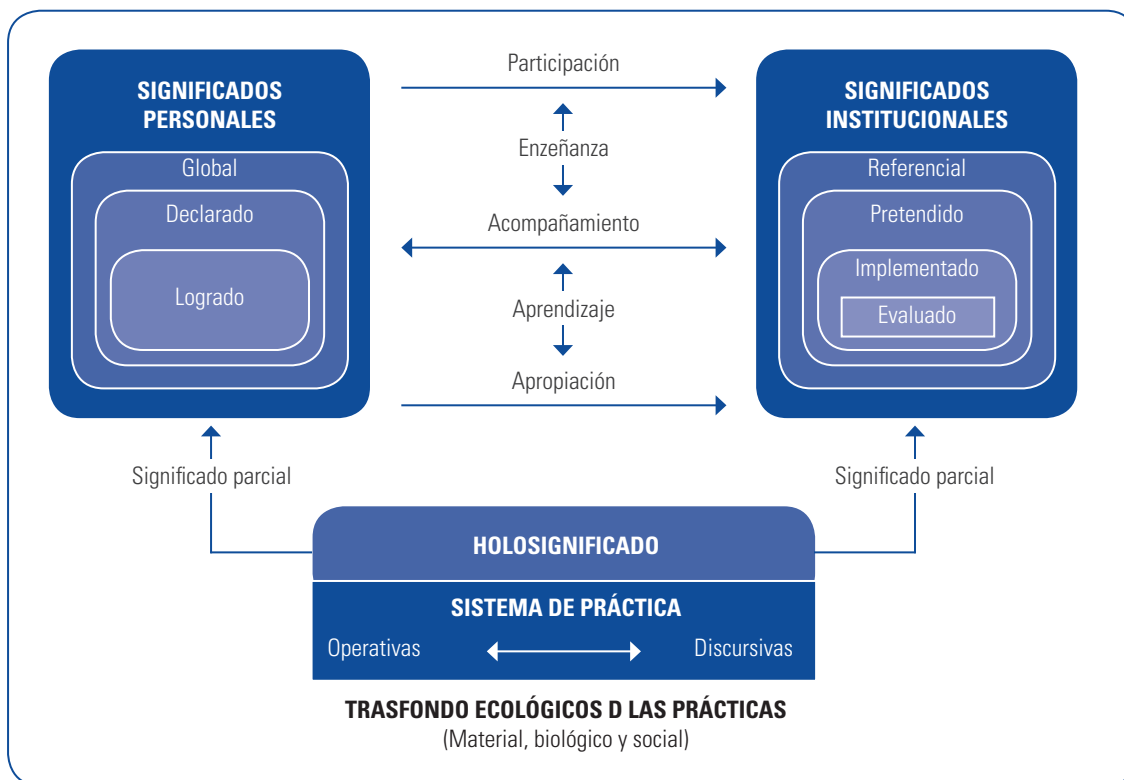
- Será un *significado institucional de referencia* de un objeto (contenido o tema matemático) la planificación o delimitación que el profesor hace para sus estudiantes sobre “lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas” (Font, 2005, p. 115). En general, se trata de lo que los expertos consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto. En el sentido de Font (2005), es un significado difícil de delimitar ya que es resultante de diferentes componentes: la historia de dicho objeto, las orientaciones curriculares, los libros de texto y materiales que la institución escolar suele utilizar o, incluso, objetos matemáticos personales de los profesores.
- Será un *significado institucional pretendido* de un objeto el sistema de prácticas que el profesor planifica sobre el objeto para un cierto proceso instruccional. O sea, la delimitación que hace de la parte específica que va a proponer a sus estudiantes durante un proceso de estudio determinado.
- Será un *significado institucional implementado* el sistema de prácticas que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los estudiantes y para las evaluaciones de los aprendizajes. En otras palabras, no todo lo que se planifica se pone exactamente en práctica, de ahí que puedan ocurrir posibles cambios en lo pretendido que surgen de las interacciones entre los sujetos en clase.
- Será un *significado institucional evaluado* de un objeto una muestra o colección de tareas o cuestiones que el profesor incluye en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes.

Desde el punto de vista de los estudiantes Godino (2003), Font (2005) y Font y Ramos (2005) relacionan el significado institucional con los siguientes aspectos:

- El *significado institucional global*, que corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el estudiante y que son relativas a un objeto matemático.
- El *significado institucional declarado*, que da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las evaluaciones propuestas, en conformidad o no con el punto vista institucional.
- El *significado institucional logrado*, que corresponde a las prácticas manifestadas en conformidad con la pauta institucional establecida.

Es importante remarcar que en el significado global pueden influir otras materias además de las matemáticas. Por ejemplo, en Inglada y Font (2003) se menciona que el significado pretendido de la “derivada” en una institución escolar no contempla la notación incremental y diferencial, y que el significado personal declarado de los estudiantes suele incorporar prácticas en las que dicha notación se utiliza. Este hecho se produce aún en el caso de que no se haya utilizado esta notación en la clase de matemáticas, ya que el cociente incremental y el concepto de diferencial se utiliza habitualmente en la clase de física, con lo que ciertas prácticas que utilizan la notación incremental y la diferencial forman parte del significado global del estudiante debido al proceso de estudio que ha seguido en la clase de física (Font & Ramos, 2005).

Figura 3.2: Tipos de significados institucionales y personales



Fuente: (Godino, 2012).

3.4 LA COMPRENSIÓN Y LA EVALUACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS

En la investigación en didáctica de las matemáticas se puede entender la comprensión como proceso mental o como competencia. Estos dos puntos de vista, según Font (2005), responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la didáctica

de las matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como proceso mental (Rocha, Cajaraville, & Labraña, 2008). En Godino y Batanero (1994) se nombra que los posicionamientos pragmáticos del enfoque ontosemiótico, en cambio, llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental en cuanto que se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas:

“en una situación ideal, y en una institución dada, diríamos que un sujeto “comprende” el significado del objeto O_i —o que ha “captado el significado” de un concepto, por ejemplo— si fuese capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas dentro de la institución correspondiente” (Godino & Batanero, 1994, p. 342).

Todavía es observable que la comprensión difícilmente será total o nula, sino que abarcará aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles.

En trabajos posteriores de Godino (2002; 2003) se considera, en el enfoque ontosemiótico, que las funciones semióticas tienen un papel muy importante en el proceso relacional entre entidades o entre grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas dentro de un determinado juego de lenguaje. La relevancia de la misma permite entender también la “comprensión” en términos de funciones semióticas. Según Godino (2003), se puede interpretar la comprensión de un “objeto O” por parte de un “sujeto X”, sea individuo o institución, en términos de funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como “funtivo (expresión o contenido)”.

Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una o muchas funciones semióticas: resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas, que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo (Rocha, Cajaraville, & Labraña, 2008).

Otro aspecto es la evaluación del conocimiento matemático. En Rocha, Cajaraville y Labraña (2008) una de las cuestiones que se plantean en este ámbito es el cómo evaluar aquello que no conocemos. En consecuencia, una de las finalidades del enfoque ontosemiótico es proporcionar criterios para la elaboración de una teoría de la evaluación del conocimiento matemático. La distinción entre el significado de los objetos, personales e institucionales, y su caracterización mediante sistemas de prácticas permiten plantear el problema de la evaluación de los conocimientos matemáticos como acoplamiento entre significados personales e institucionales.

Esta perspectiva sobre la evaluación hace difícil aplicar a la evaluación de los conocimientos las teorías clásicas psicométricas:

“para un objeto matemático dado, el conocimiento de un sujeto sobre el mismo, no puede reducirse a un estado dicotómico (conoce o no conoce) ni a un grado o porcentaje unidimensional (conoce x por ciento), lo que hace difícil aplicar a la evaluación de los conocimientos las teorías clásicas psicométricas de maestría de dominio o del rasgo latente (Godino y Batanero, 1994, p. 343).

Por lo tanto, en el enfoque ontosemiótico se considera que, para poder evaluar los resultados de un proceso de instrucción realmente implementado (significado implementado) o bien de un proceso de instrucción planificado en un libro de texto (significado pretendido), es necesario establecer el significado de referencia que sirva de comparación.

3.5 CONFIGURACIONES DE OBJETOS MATEMÁTICOS Y FACETAS DUALES

El enfoque ontosemiótico propone para el análisis didáctico diversas facetas y niveles de análisis. Las facetas propuestas se refieren a las siguientes dimensiones: epistémicas, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica. Con respecto a los niveles se describen los siguientes: un nivel que hace referencia a las prácticas matemáticas y didácticas, otro a las configuraciones de objetos y procesos matemáticos y didácticos, un tercero que se refiere a las normas y metanormas y un último nivel vinculado a la noción de idoneidad. En la siguiente figura, se ilustra un modo de visualizar este conglomerado de facetas y niveles.

Figura 3.3: Facetas y niveles de análisis didáctico



Fuente: (Godino, 2012).

En estudios de Konic y Godino (2011) se considera que las facetas epistémicas resultan de utilidad para estructurar un modelo de referencia didáctico global para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. A partir de la mencionada referencia global, se deriva en una referencia didáctico local que permite validar la elaboración de un instrumento. Dicho instrumento debe permitir evaluar algunas categorías y tipos de conocimientos específicos que poseen los estudiantes. Muestra de ello es un referente didáctico sobre la transición de la aritmética al álgebra que proporcione indicadores para la elaboración del cuestionario requiere la consideración de una multiplicidad de aspectos que intervienen en un proceso didáctico.

Con vista a ello, Godino (2009) describe, como se cita a continuación, una breve caracterización de aspectos que intervienen en un proceso didáctico:

- **Epistémica:** conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes de los contenidos ya sean problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades o argumentos).
- **Cognitiva:** conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes.
- **Afectiva:** estados afectivos -actitudes, emociones, creencias y valores- de cada estudiante con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
- **Mediacional:** recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
- **Interaccional:** patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y sus secuencias orientadas a la fijación y negociación de significados.
- **Ecológica:** sistema de relaciones con el entorno social, cultural, político, económico, que soporta y condiciona el proceso de estudio.

Los puntos que siguen a continuación están orientados a profundizar en los niveles de análisis. Para ello, en primer lugar, se indagará en los objetos intermitentes y emergentes del sistema de prácticas. Posteriormente, en las facetas o dimensiones del conocimiento matemático.

3.5.1 Objetos intermitentes y emergentes del sistema de prácticas

En el enfoque ontosemiótico se considera que, para la realización de cualquier práctica, es necesario activar un conglomerado formado por algunos o todos los elementos siguientes: lenguaje, situaciones, definiciones (conceptos), proposiciones, procedimientos y argumentos.

“Si consideramos los componentes del conocimiento que es necesario que el sujeto tenga adquirido para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una determinada situación-problema (por ejemplo, representar una función determinada) vemos que, de entrada, el sujeto ha de utilizar un determinado lenguaje verbal (dominio, puntos de corte, asíntota, etc.), simbólico (por ejemplo, la fórmula de la función) y gráfico (sistemas de ejes de coordenadas, gráficas, etc.). Este lenguaje es parte ostensiva de una serie de conceptos (función, gráfica, dominio, etc.) y propiedades (por ejemplo, si la derivada es positiva, la función es creciente) que son necesarios para justificar las acciones que realizará el estudiante (por ejemplo, calcular la derivada primera o las soluciones de la ecuación $f(x)=0$, etc.), las cuales también se utilizarán en la argumentación que realizará el estudiante para decidir que las acciones simples que componen la práctica, y ella misma entendida como acción compuesta, son satisfactorias” (Font, 2005, p.114).

En Font (2005) y Rocha, Cajaraville y Labraña (2008) se definen con más detalle estos seis tipos de objetos:

- **Lenguaje:** términos, expresiones, notaciones y gráficos. En un texto viene dado de forma escrita o gráfica, pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros como el oral o el gestual. Mediante el lenguaje, el ordinario y el específico matemático, se describen otros objetos no lingüísticos.
- **Situaciones-problemas:** se trata de problemas más o menos abiertos, aplicaciones extra matemáticas o intramatemáticas y/o ejercicios. Son las tareas que inducen a la actividad matemática.
- **Procedimientos:** son utilizados por el sujeto ante las tareas matemáticas. Pueden ser operaciones, algoritmos o técnicas de cálculo, entre otros.
- **Conceptos:** dados mediante definiciones o descripciones bien sean números, puntos, rectas o funciones.
- **Proposiciones:** enunciados sobre conceptos: propiedades, teoremas, corolarios o lemas.
- **Argumentos:** se usan para validar y explicar las proposiciones, sean deductivas o de otro tipo.

Para Godino (2002) esta clasificación de los objetos matemáticos es una primera categorización de las entidades que constituyen el sistema de prácticas y son consideradas por el autor como “los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organi-

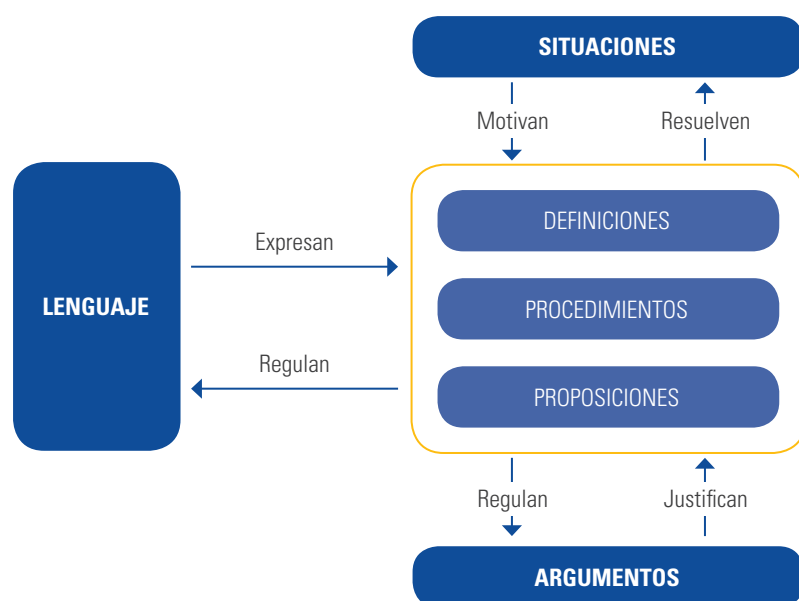
zaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías, etc.” (p. 246). Así mismo, en su trabajo de 2003, Godino afirma que el lenguaje es una entidad inseparable de las demás, en tanto que éste les da corporeidad. El lenguaje tendrá en el significado sistémico una valencia multifuncional y, de ahí, se interpreta que será un lenguaje representacional, actuacional, situacional, proporcional, conceptual y argumentativo.

“Aunque mucha matemática es mental, poco se podría avanzar en el trabajo matemático, si no se tuviera el recurso de la escritura, la palabra y los registros materiales” (p.118). De esta manera, se justifica el puesto central que ocupan las entidades lingüísticas en la actividad matemática, su lugar como mediadoras entre la praxis y el logos, y su área “en el centro de atención de la didáctica, pero sin perder de vista la actividad matemática y los objetos culturales no lingüísticos emergentes de esa actividad” (Godino, 2003, pp. 118-119).

De igual manera, Godino (2002) define que las situaciones-problemas “son las promotoras y contextualizadoras de la actividad matemática, y junto con las acciones constituyen el componente práctico de las matemáticas o la praxis” (p.246). De ahí se desprende una idea de la praxis como la representación de objetos matemáticos en forma textual, oral, gráfico o, incluso, gestual (Chevallard, 1997). Los conceptos, proposiciones y argumentaciones desempeñan un papel normativo y regulativo en las matemáticas: son los componentes teóricos o discursivos, el logo entendido por tecnología y teoría (Chevallard, 1992). Todas esas entidades descritas como logos y praxis están marcadas por una relación de interdependencia y el lenguaje, como se ha indicado, es algo presente en todas ellas. Es de este modo como el autor pretende hacer explícito y operativo el componente discursivo o teórico de la praxeologías matemáticas.

A este conglomerado, necesario para la realización y evaluación de la práctica en el enfoque ontosemiótico (EOS), se le llama configuración. Estas configuraciones pueden ser cognitivas (conglomerados de objetos personales) o epistémicas (conglomerados de objetos institucionales) según se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional. Así que, para superar la brecha entre un objeto personal y la práctica en la que dicho objeto personal es determinante, hay que considerar la activación, entre otros aspectos, de una configuración cognitiva de la que forma parte el objeto personal.

Figura 3.4: Constructo de configuración epistémica y cognitiva



Fuente: (Godino, 2012).

3.5.2 Facetas o dimensiones del conocimiento matemático

El siguiente apartado trata de las facetas o dimensiones duales que, según el contexto y juego de lenguaje en que participan, pueden ser personal-institucional, ostensiva-no ostensiva, ejemplar-tipo, unitaria-sistémica o expresión-contenido. Como consecuencia de esos emparejamientos se complementan de forma dialéctica y, junto con otras entidades (por ejemplo, objetos matemáticos), enriquecen el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática. En otras palabras, esas facetas son consecuencias de una serie de procesos interpretativos en los que se involucran los objetos matemáticos y sus elementos de significado, en los que se da lugar a distintas versiones o miradas de los mismos (Godino, 2002; Font, 2005). A continuación, se presentan diferentes tipos de dualidades.

En la *dualidad personal-institucional*, si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran objetos institucionales, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona, se consideran como objetos personales. Ahora, si se trata de textos o discursos oficiales como son los documentos curriculares, los libros de textos o las explicaciones del profesor usados como referencia en la clase, estaremos delante de un objeto institucional o de objetos institucionales. En una clase pueden emerger microinstituciones consecuencia de conductas (maneras de hablar y actuar) compartidas entre grupos de estudiantes y regulados por ellos que, en interacción, por ejemplo con la cultura matemática representada por el profesor, pueden producir acoplamientos progresivos en las cogniciones institucionales.

En ese aspecto, Godino (2002) asume como esencial la distinción entre persona e institución, de manera que en el sistema didáctico tal distinción se refleje en los propios objetos de enseñanza y aprendizaje. Esto se debe a que el sistema didáctico “permite caracterizar el aprendizaje como acoplamiento progresivo entre significados personales e institucionales” (Godino, 2002, p. 249).

En la *dualidad unitaria-sistémica*, si se toma un determinado concepto y se considera como una entidad compuesta, como por ejemplo las medidas de tendencia central, con una cierta organización o estructura (conceptos-sistema) y, también, con una determinada relación entre ambas entidades, estaremos tratando de un objeto sistémico. Si el concepto es considerado como una entidad unitaria que se manifiesta de manera transparente, como ocurre con las operaciones aritméticas de adición y división como si se trata de entidades unitarias o elementales, estaremos tratando de un objeto elemental.

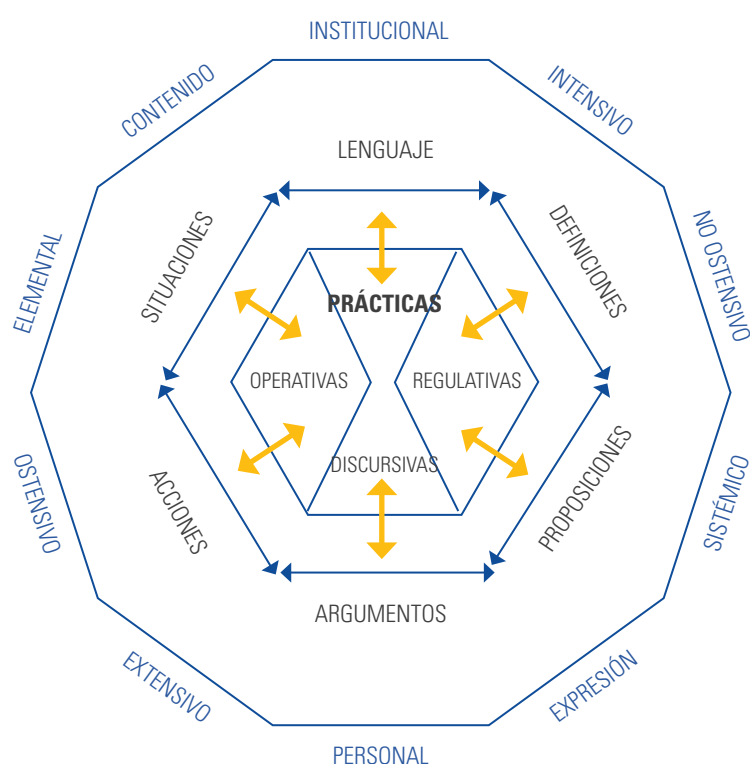
En la *dualidad ostensivo-no ostensivo*, cualesquiera de los objetos tienen una faceta ostensiva, esto es, perceptible, y otra no ostensiva. Así que serán ostensivas tanto las entidades lingüísticas como son los gestos, las escrituras y los sonidos perceptibles de forma directa, como las entidades praxémicas o discursivas que necesitan de los elementos lingüísticos para su constitución y funcionamiento. “El lenguaje viene a ser el medio por el cual no sólo se expresan los no ostensivos, sino también es instrumento para su constitución y desarrollo” (Godino, 2002, p. 250). Serán considerados objetos no ostensivos los objetos mentales, o sea, los lingüísticos que sean pensados, imaginados, por una persona. El ostensivo puede ser no ostensivo. Tal paradoja, en palabras de Godino (2002) puede resolverse hablando de objetos lingüísticos como entidades funcionales primarias (ostensivas-no ostensivas), tanto si son considerados como objetos personales o institucionales.

La *dualidad intensivo-extensivo (ejemplo-tipo)* es una distinción clásica en la teoría del lenguaje y se corresponde a una interpretación lingüística de la distinción concreto–abstracto. Es una noción que puede ser “útil para describir la disposición matemática hacia la generalización y explicar algunos conflictos en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos derivados de la confusión entre ejemplos y tipo” (Godino, 2002, p. 251). En la actividad matemática estamos siempre interesados por el proceso de generalización de los problemas y discursos, por resolver ciertos tipos de problemas y, en un proceso de estudio particular, debemos precisar en cada circunstancia si nos referimos a un objeto concreto o a dicho objeto como representante de una clase de objetos, como ejemplos de un cierto tipo o componente de un sistema. La condición de concreto o abstracto depende del juego de lenguaje en que se usa.

En relación a la *dualidad expresión-contenido* (significante-significado), cabe mencionar que la distinción entre expresión y contenido tiene en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. El uso que se hace de estos términos es el mismo atribuido a la función semiótica. Esta función semiótica hace referencia a la relación de dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí; de las correspondencias entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución).

Los constructos aquí presentados y que constituyen el modelo del enfoque onto-semiótico se pueden representar por medio del siguiente esquema:

Figura 3.5: Herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico



Fuente: Rocha, Cajaraville, y Labraña (2008).

En el interior de la figura 3.5 se observan las prácticas operativas, discursivas y regulativas. Para la realización de las prácticas es necesario activar una configuración (ver hexágono) y, a su vez, los objetos que forman esa configuración son emergentes de las prácticas. Por último, los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas

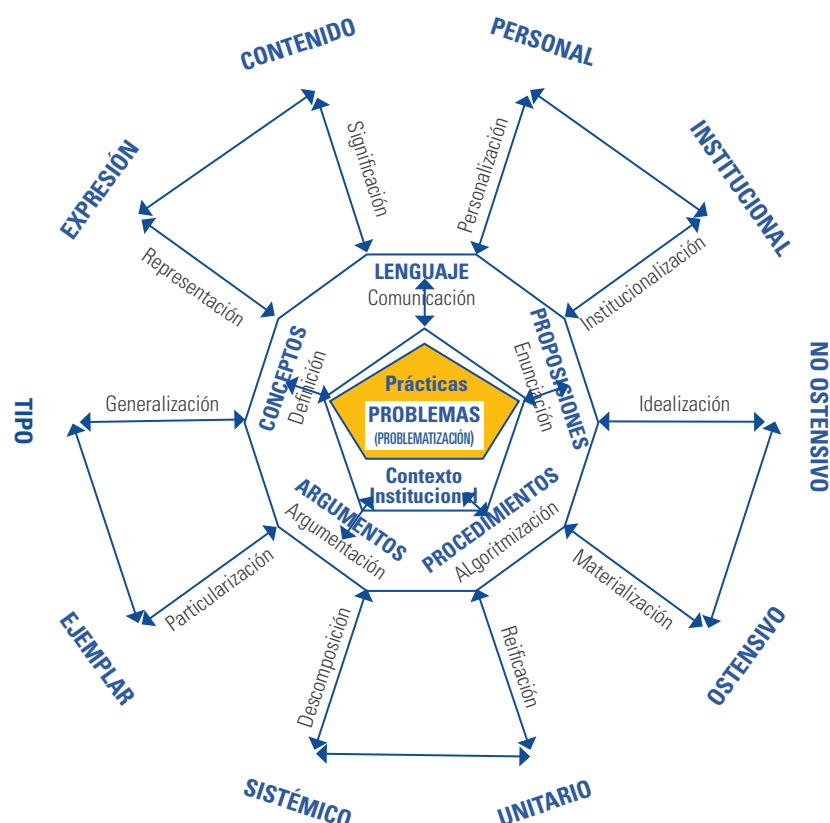
y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las cinco facetas o dimensiones duales (ver decágono) (Rocha, Cajaraville, & Labraña, 2008).

Por otra parte, Fernández, Cajaraville y Godino (2011) señalan que tanto las dualidades como las configuraciones de objetos primarios se pueden analizar desde la perspectiva de proceso-producto. La emergencia de los objetos de la configuración como son los problemas, las definiciones, las proposiciones, los procedimientos y los argumentos, tienen lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización) y argumentación. Así mismo, las dualidades dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/epistémicos:

- Institucionalización-personalización.
- Generalización-particularización.
- Análisis-descomposición – síntesis.
- Materialización-concreción – idealización-abstracción.
- Expresión-representación–significación.

En la figura 3.6, se representan las diferentes nociones teóricas que se han descrito sucintamente. En el enfoque ontosemiótico la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos que están relacionados entre sí formando configuraciones. Véase la siguiente figura:

Figura 3.6: Objetos y procesos matemáticos según el enfoque ontosemiótico



Fuente: Godino (2012).

En Font y Contreras (2008) se considera que las facetas duales extensivo/intensivo, ostensivo/no ostensivo y unitario/sistémico permiten delimitar los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de idealización y materialización y con estos los de reificación y descomposición. Se trata de una delimitación importante que permite un análisis más detallado de cada uno de estos procesos y un análisis, también, de su presencia combinada en la actividad matemática. Por tanto, clarifica la naturaleza del objeto matemático usualmente considerado como una entidad abstracta o ideal.

En el enfoque ontosemiótico no se intenta dar, de entrada, una definición de “proceso” ya que hay muchas clases diferentes de procesos. Se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, de procesos cognitivos, metacognitivos, procesos de instrucción, procesos de cambio o de procesos sociales. Se trata de procesos muy diferentes en los que la única característica común a muchos de ellos puede ser la consideración del factor “tiempo” y, en menor medida, el de “secuencia en la que cada miembro toma parte en la determinación siguiente” (Fernández, 2011).

Por lo tanto, Godino (2011) menciona una lista de procesos que se consideran importantes en la actividad matemática, sin pretender incluir en ella todos los procesos implicados, entre otros motivos porque algunos de los más importantes, por ejemplo, el proceso de resolución de problemas o el de modelización, más que procesos son híper o mega procesos, que implican otros subprocesos más elementales como la representación, la argumentación, la idealización, la generalización, etc.

3.6 LOS PROCESOS METACOGNITIVOS EN EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

En la explicación de la realización de una práctica matemática, el enfoque ontosemiótico trata de reflejar de manera implícita la importancia de la metacognición. Por ejemplo, en Font (2005), en coherencia con los presupuestos pragmáticos del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, se plantea la necesidad de interpretar la relación entre un objeto personal y la práctica en la que dicho objeto es determinante en términos de brecha. Se observa que los tres aspectos que se deben tener en cuenta para salvar dicha brecha son requisitos que, según Rocha, Cajaraville y Labraña (2008), incorporan procesos metacognitivos.

Entre dichos procesos metacognitivos se encuentran el valorar lo que uno va a hacer, el decidir qué secuencia de acciones es la más indicada para conseguir lo que se ha decidido y el seguir un curso temporal. Éstos son aspectos que implican, entre otras cosas, tener en cuenta el conocimiento que uno tiene de sí mismo, de sus propias capacidades para llevar a cabo la tarea, y el conocimiento de la tarea. Es decir, son aspectos metacognitivos que, aunque sean considerados implícitamente, todavía deben ser desarrollados.

“Para superar la brecha entre un objeto personal y la práctica en la que dicho objeto es determinante, hay que considerar la activación, entre otros aspectos, de una configuración cognitiva de la que forma parte el objeto personal” (Font, 2005, p. 114). Así también, para la realización de una configuración cognitiva, hay que contemplar una configuración metacognitiva que acompaña a la primera interacción con ella y de la cual también forma parte el objeto personal (Rocha, Cajaraville, & Labraña, 2008). En ese sentido, se puede pensar en la metacognición como un componente más que considerar en el intento de superar esa brecha.

El enfoque ontosemiótico es consciente de las limitaciones que presentan las configuraciones cognitivas para explicar la realización de una práctica. Éstas se presentan a continuación:

- Para realizar una práctica matemática, por ejemplo, la representación gráfica de una función, el sujeto necesita una serie de conocimientos sobre la representación gráfica de funciones que son fundamentales para la realización de la práctica que consiste en representar una función determinada y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios. Es decir, se debe tener en cuenta que el sujeto tiene un conocimiento sobre la “representación gráfica” (por ejemplo, como resultado del proceso de instrucción) (Font, 2005, p. 114). Asimismo, “también se considera que el sujeto tiene unas capacidades y habilidades de tipo general” (Rocha, Cajaraville & Labraña, 2008, p. 41).
- En el enfoque ontosemiótico se considera que para superar la brecha entre un objeto personal y la práctica en la que dicho objeto personal es determinante, es necesario considerar la activación, entre otros aspectos, de una configuración cognitiva de la que forma parte el objeto personal (Rocha, Cajaraville & Labraña, 2008, p. 41).
- Lo anterior mencionado permite justificar porqué en el enfoque ontosemiótico se considera que la brecha entre el objeto y la práctica se salva mediante la activación de una configuración cognitiva. Dicha configuración cognitiva es situada, es decir, específica para la situación-problema que se ha planteado. Además de la configuración cognitiva, en el enfoque ontosemiótico se considera que hay que tener en cuenta otros factores, como son, entre otros, los instrumentos técnicos de los que dispone el sujeto, el tiempo, el proceso de gestión y regulación de la configuración cognitiva (Font & Ramos, 2005).
- “La resolución de problemas, y de manera más general, la modelización debe ser considerada más bien como “híper-proceso” matemáticos, al implicar configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios (establecimiento de conexiones entre los objetos y generalización de técnicas, reglas y justificaciones). La realización efectiva de los procesos de estudio requiere, además, la realización de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (supervisión) que conllevan procesos meta-cognitivos” (Godino, Batanero & Font, 2006, p. 9).

Estas constataciones que se hacen en el enfoque ontosemiótico ayudan a ampliar las explicaciones de la realización de una práctica.

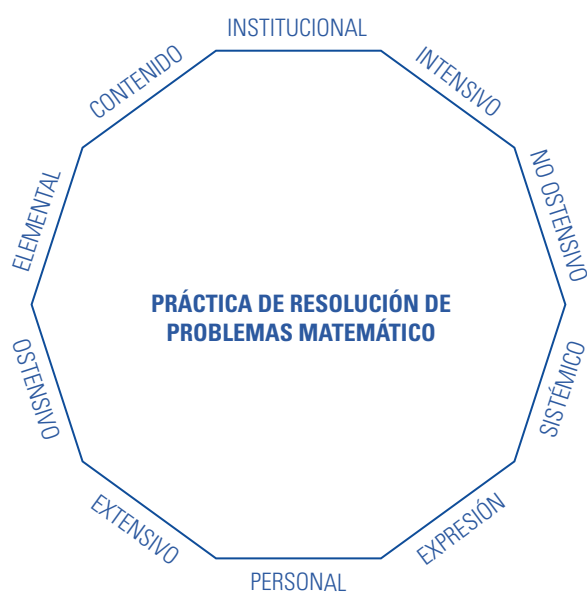
3.7 CONSTRUCTOS DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO UTILIZADO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Las nociones introducidas hasta aquí serán ahora puestas en práctica –usadas sistemáticamente– a través de la técnica del análisis semiótico, herramienta analítica del modelo del enfoque ontosemiótico que permite caracterizar los significados institucionales y personales manifestados en la actividad matemática y los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. La comparación entre los significados atribuidos a los objetos

matemáticos permite identificar conflictos semióticos entre los agentes considerados. Dichos conflictos se refieren a toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos, personas o instituciones, en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas (Godino, 2002).

Dentro de la variedad de nociones teóricas introducidas por el enfoque ontosemiótico para el análisis de la resolución de problemas, nos han resultado útiles algunas de las facetas duales y los constructos de configuración epistémica y cognitiva como el lenguaje, las proposiciones, las definiciones, los procedimientos, los argumentos y las situaciones y problemas. Las facetas duales permitirán ver las prácticas de la resolución de problemas desde diferentes perspectivas. Véase la figura 3.7:

Figura 3.7: Práctica de resolución de problemas matemáticos RP



Fuente: Rocha, Cajaraville y Labraña, (2008).

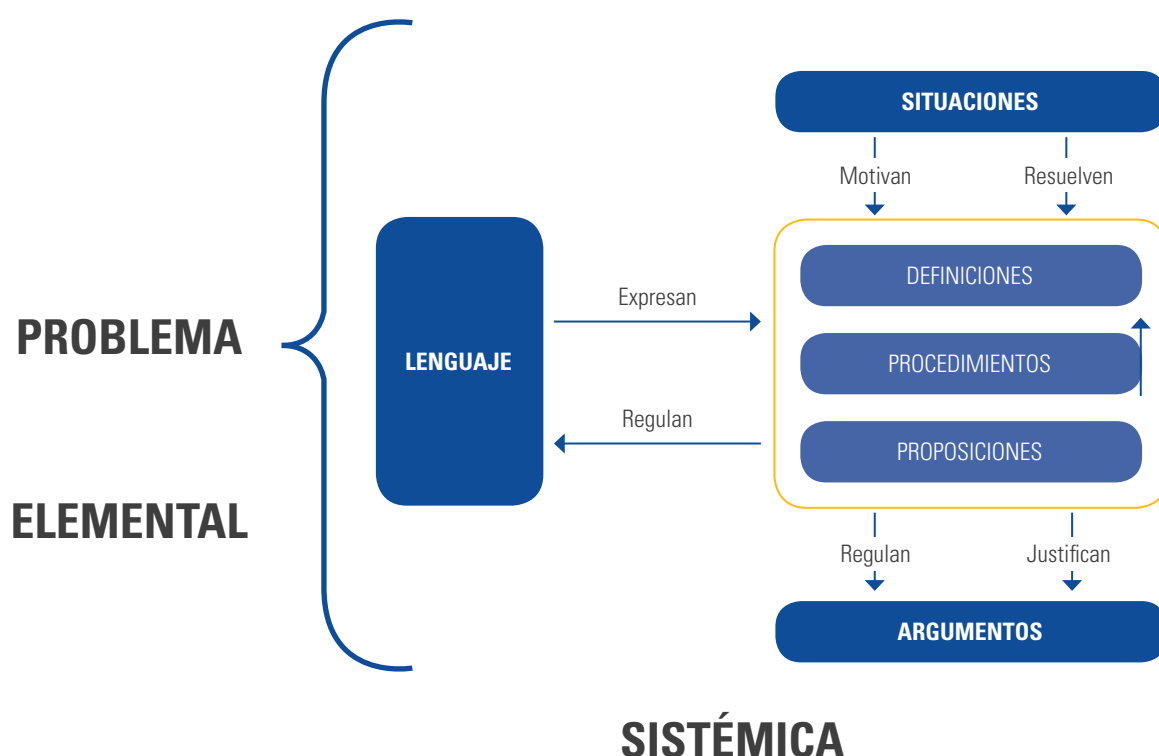
En Rocha, Cajaraville y Labraña (2008) se aporta información relevante sobre la práctica de resolución de problemas. En este trabajo se considera, además, esencial tener en cuenta las facetas elemental-sistémico, institucional-personal e intensivo-extensivo:

- La faceta intensivo-extensivo ha sido puesta de relieve por muchos investigadores sobre la resolución de problemas. Por ejemplo, el proceso de particularización-generalización resulta básico en la investigación de Mason, Burton y Stacey (1989).

- La faceta institucional-personal se considera básica para poder comparar la resolución de un problema realizado por un estudiante con la resolución que se considera correcta desde la perspectiva institucional.
- La faceta elemental-sistémica aplicada a la resolución de problemas permite entender el problema como la parte visible de un iceberg, el cual se puede representar por medio de una configuración epistémica.

Véase en la figura 3.8 en la que se presenta la configuración epistémica-cognitiva:

Figura 3.8: Configuración epistémica-cognitiva asociada a la resolución de problemas RP



Fuente: Rocha, Cajaraville y Labraña (2008).

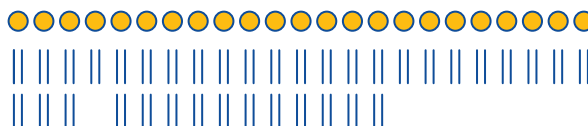
Esta perspectiva sistémica se puede justificar en las diferentes maneras de resolver problemas.

En el siguiente problema, por ejemplo, se puede observar la importancia que tiene el lenguaje:

En una granja tenemos gallinas y conejos, en total hay 23 cabezas y 76 patas. ¿Cuántos animales de cada clase tenemos? (Rocha, Cajaraville & Labraña, 2008, p. 35).

Se presentan, a continuación, diferentes representaciones de este problema matemático.

- Representación icónica:



- Representación aritmética:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \underline{x2} ; 76-46=30; 30:2=15 \\ 46 \end{array}$$

- Representación algebraica:

$$x=\text{Conejos}; y=\text{Gallinas} \begin{cases} x+y=23 \\ 4x+2y=76 \end{cases}$$

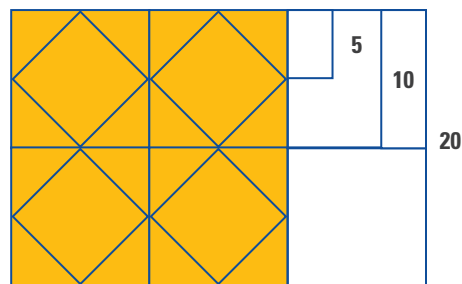
Según el tipo de lenguaje utilizado, un mismo problema plantea diferentes exigencias conceptuales y técnicas: la primera representación, la icónica, corresponde a la siguiente idea: “damos dos patas a cada animal y, después, las que quedaran van asignándose de dos en dos hasta que ya no quede ninguna”. Se trata de un reparto conceptual y argumentativo. En la segunda representación, la aritmética, hay también exigencias técnicas de cálculo numérico. En la tercera representación se observa que, sin embargo, el método algebraico es mecánico en el reparto. Se constata que, en realidad, no hay reparto, sino apenas una manipulación simbólica técnica (Rocha, Cajaraville & Labraña, 2008). Las exigencias conceptuales y argumentativas están al principio para poder escribir las ecuaciones que dan como resultado los números del enunciado, mientras que, en los casos anteriores, se actuaba descomponiendo esos números.

En el siguiente problema se puede observar la importancia que tiene, también, el bloque de las definiciones o conceptos, procedimientos y proposiciones. Si bien la forma de representación utilizada en la resolución es siempre la misma, el lenguaje geométrico, los conceptos, procedimientos utilizados son diferentes:

Dado un cuadrado de 20 cm de lado unimos los puntos medios de los lados opuestos para obtener 4 cuadrados. Si en cada cuadrado unimos los puntos medios de los lados consecutivos se obtiene otro cuadrado. ¿Cuál es su área? (Rocha, Cajaraville & Labraña, 2008, p. 36).

Después de traducir el enunciado al lenguaje geométrico, el problema se puede solucionar por medio de diferentes conceptos, procedimientos y proposiciones:

- Representación geométrica



- Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{2 \cdot 5^2} \Rightarrow A = l^2 \Rightarrow A = (5\sqrt{2})^2 = 50$$

- Área del cuadrado mediano:

$$A = l^2 \Rightarrow A = (10)^2 = 100 \Rightarrow 4AT = \frac{4bh}{2} \Rightarrow 4AT = \frac{4(5)(5)}{2} \Rightarrow AT = 50$$

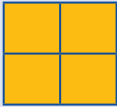
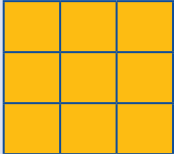
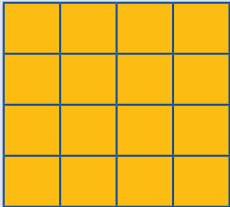
- Área y Fracciones:

$$ACG = l^2 \Rightarrow A = (20)^2 = 400 \Rightarrow ACP = \frac{l^2}{2} \Rightarrow ACP = \frac{(10)^2}{2} = 50$$

En el siguiente problema se puede observar la importancia que tiene, también, el bloque de los argumentos:

Encuentra el mayor número posible de cuadrados de cualquier tamaño que se puedan formar en un tablero de $n \times n$ (Rocha, Cajaraville & Labraña, 2008, p. 38).

- Representación geométrica

	1x1	2x2	3x3	4x4	TOTAL	
	1					1
	4	1			5	$1+2^2$
	9	4	1		14	$1+2^2+3^2$
	16	9	4	1	30	$1+2^2+3^2+4^2$

- Para un tablero de 8x8, será:

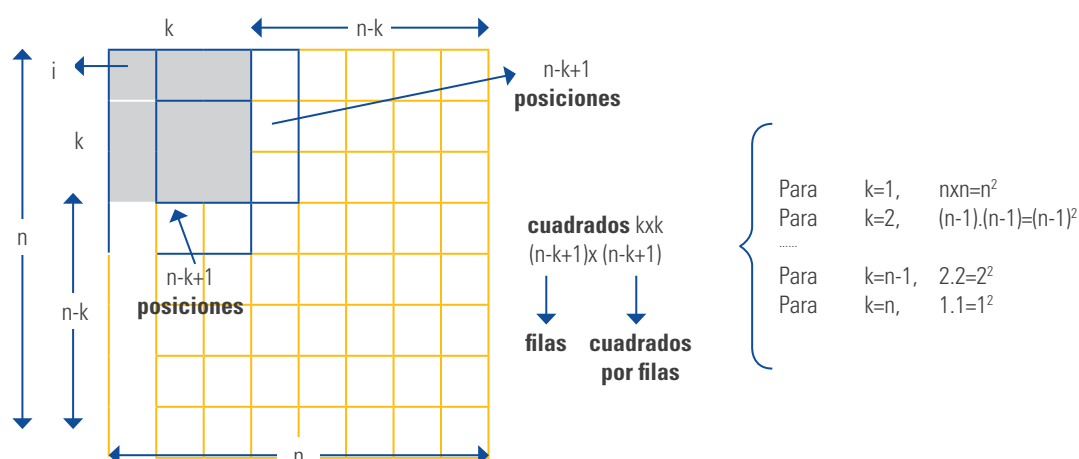
$$8^2+7^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2=204$$

Por tanto, general, los cuadrados que hay en un tablero de $n \times n$ son igual a la suma de los cuadrados de los números consecutivos, el mayor de los cuales es el de los cuadrados que forman la longitud del tablero.

$$\sum_{1}^n n^2$$

En este caso el argumento dado se limita a una generalización por inducción empírica o incompleta que parece ser cierta, pero sin estar del todo seguros de que lo sea y, en caso de serlo, sin saber por qué lo es. Se han limitado a la formulación de una conjetura (Rocha, Cajaraville & Labraña, 2008, p. 51). En Mason, Burton y Stacey (1989) se da una argumentación por medio de elementos genéricos:

Figura 3.9: Análisis de una argumentación por medio de elementos genéricos

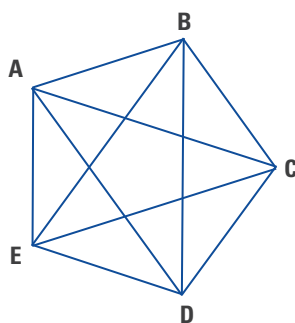


Fuente: Rocha, Cajaraville y Labraña (2008).

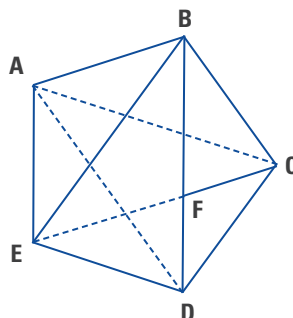
En el enfoque ontosemiótico el constructo de configuración que ha aparecido al contemplar la faceta elemental-sistémica es básico para poder explicar la realización de una práctica matemática. En Rocha, Cajaraville y Labraña (2008) ha sido útil el constructo de configuración para explicar las prácticas de resolución de problemas matemáticos por estudiantes. Es decir, se permite confeccionar configuraciones epistémicas de referencias que pueden ser utilizadas para evaluar las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas. El hecho de contemplar la situación-problema en el marco de una configuración epistémica permite entender que a un problema se le puede asociar diferentes configuraciones epistémicas en función de las diferentes formas de resolución.

Veamos el siguiente ejemplo desarrollado en Rocha, Cajaraville y Labraña (2008):

El pentágono estrellado: si en un pentágono regular que tiene por lados AB , BC , CD , DE , Y EA , trazas todas sus diagonales, obtienes un pentágono estrellado (Rocha, Cajaraville & Labraña, 2008).



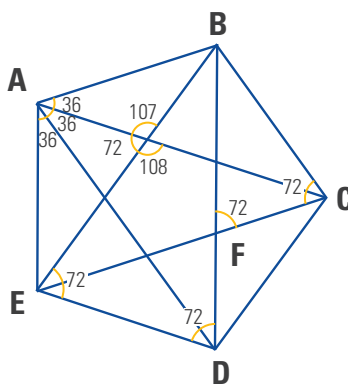
Sus lados son: AC , CE , EB , BD Y DA . Demuestra que los triángulos BED y BCF son semejantes (sugerencia: basta con probar que tiene dos ángulos respectivamente iguales):



La resolución de este problema se puede acometer de varias formas distintas. Se presenta, a continuación, dos de ellas. La posición de los triángulos BDE y BCF “no es Thales”. Si se acepta la sugerencia que se da en el texto, existen varias formas de probar que ambos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales. Se consideran entonces dos modelos de prueba.

Prueba 1, solución geométrica: como AB es paralelo a EC , el ángulo B del triángulo BDA es igual al ángulo F de BCF (alternos internos entre paralelas), pero el triángulo BDA es igual al BDE , por construcción, así que el ángulo B anterior es igual al ángulo E de BDE . Por tanto $E = F$. A su vez, el ángulo C de BCF es el mismo ángulo de BCE . Como los triángulos BCE y BDE son iguales, por construcción, se deduce que $C = D$.

Prueba 2, solución basada en la medición de ángulos: en el interior del polígono estrellado se forma un pentágono regular, su ángulo central es $360/5 = 72^\circ$. El ángulo interior es su complementarios $180 - 72 = 108^\circ$. Así que las diagonales trazadas en el pentágono regular trisecan, cada ángulo interior de dicho pentágono. Así pues, los ángulos de la figura E , D , F y C , valen todos 72° . Por tanto, se ha demostrado de dos formas distintas que los triángulos BDE y BCF son semejantes por tener sus ángulos respectivos iguales. Véase en la siguiente figura:



3.8 CONCLUSIONES

A lo largo de este capítulo, se ha observado que el enfoque ontosemiótico es la formulación de una ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de las matemáticas como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema lógicamente organizado, pero teniendo en cuenta, además, la dimensión cognitiva individual. En este sentido, el enfoque ontosemiótico puede ayudar a analizar los procesos de cognición e instrucción matemática a partir de las nociones de problema matemático, objeto matemático, comprensión y configuración cognitiva.

Estas nociones teóricas constituyen una respuesta operativa al problema ontológico de la representación y significación del conocimiento matemático. Es decir, estas nociones permiten establecer conexiones coherentes entre los programas epistemológicos y cognitivos sobre unas bases en que se describen como ontosemióticos.

Finalmente, el papel central dado en el enfoque ontosemiótico a la práctica matemática (en su versión institucional, esto es, relativa a juegos de lenguaje y formas de vida) y las características que se le atribuyen a dicha noción -acción compartida, situada, intencional, mediada por recursos lingüísticos y materiales- permiten una articulación coherente con otras posiciones teóricas, como el constructivismo social, la socioepistemología y, en general, las perspectiva etnomatemática y socioculturales en educación matemática.

CAPÍTULO 4:

LA ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS

“Sería un error el creer que la solución de un problema es un asunto puramente intelectual, la determinación y las emociones juegan un papel importante. Una determinación un tanto tibia, un vago deseo de hacer lo menos posibles pueden bastar a un problema de rutina que se plantea en la clase; pero para resolver un problema científico serio, hace falta una fuerza de voluntad capaz de resistir años de trabajos y de amargos fracasos (Polya, 1965, p. 80).

4.1 INTRODUCCIÓN

En la educación matemática, autores como Polya (1965) han declarado, desde hace muchos años, que sería un error creer que la solución de un problema es un asunto puramente intelectual en la medida que la determinación y las emociones juegan también un papel importante. Es decir, que los referentes afectivos tales como las emociones, las creencias o las actitudes no representan algo suntuoso o artificial, sino que están comprometidos e involucrados en el éxito o en el fracaso de los estudiantes y de los profesores en el desarrollo de sus tareas destinadas a la producción y construcción de conocimientos matemáticos.

En este sentido, tanto los profesores como los estudiantes podrían ser responsables de los bloqueos que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas. También, en Gómez-Chacón (2000) se señala que la comprensión insuficiente de las matemáticas puede ser producto de sentimientos de desconcierto y perplejidad. Igualmente, se indica que los sentimientos de aburrimiento pueden codificar la ausencia de compromiso. De manera que cuando se habla de miedo, aburrimiento, desconcierto, desamor, disgusto, rabia y desilusión hacia las matemáticas se está en presencia de información preponderante que tiene que ver con fracaso en las tareas destinadas a aprender o a enseñar matemáticas y, por ende, configuran actitudes desfavorables hacia esta asignatura (Martínez-Padrón, 2005).

Desde este punto de vista, en el aula, los estudiantes y los profesores construyen actitudes positivas, neutras o negativas hacia las matemáticas. Las primeras actitudes, las positivas, pueden conducir a que ellos se enamoren de las matemáticas y esto permite la construcción de ámbitos de afecto, estimación y reconocimiento. Las neutras derivan en una ausencia de interés, atención y preocupación por las matemáticas. Por último, las actitudes negativas generan rechazo hacia dicha materia (Martínez, 2008). Por tanto, no es posible que un sujeto pueda construir y reconstruir competencias matemáticas, si a la par y de manera imbricada, no construye y reconstruye sus inteligencias y sus actitudes positivas y apropiadas hacia esta ciencia/asignatura.

Sobre la base de estas consideraciones, en este capítulo se abordan aspectos específicos sobre las actitudes, sus componentes, características e importancia. A continuación, se hace una aproximación a los problemas en la enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas. Asimismo, se hace mención a las actitudes matemáticas, a la actitud hacia las matemáticas, al modelo de Mandler y a las dimensiones del estado emocional en los procesos de resolución de problemas matemáticos. Al final de este capítulo, se puntualiza en los modelos de evaluación de las actitudes hacia las matemáticas.

4.2 LAS ACTITUDES

En la educación en general y, particularmente, en la educación matemática, las actitudes pueden considerarse uno de los aspectos psicológicos que han alcanzado más difusión. Este hecho puede asociarse a la calidad de desarrollo de la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas en particular. Por ello es importante, en primera instancia, caracterizar el término actitudes. Para ello, partimos de la definición clásica de Allport (1935) de actitudes “como un estado mental y neurofisiológico de disponibilidad, organizado por la experiencia que ejerce una influencia directiva sobre las reacciones del individuo hacia todos los objetos o todas las situaciones que se relacionan con ella” (citado por Cardoso & Vanegas, 2012, p. 239). Por su parte, Rokeach (1968) citado por Cardoso y Vanegas (2012), opinó que las actitudes son organizaciones de creencias relativamente permanentes que predisponen a responder de un modo preferencial ante un objeto o situación. En cambio, Likert (1976) afirmó que las actitudes son disposiciones hacia una acción manifiesta.

Sobre la base de estas afirmaciones, se pueden derivar las siguientes definiciones de actitud:

- En Gairín (1990) se considera que las actitudes son instancias que predisponen y dirigen al sujeto sobre la realidad, filtran las percepciones y orientan el pensamiento para adaptarlo al contexto.
- En Clemente (1995) se definen las actitudes como predisposiciones de valoración que son emitidas por los sujetos, así también como sentimientos positivos o negativos que están asociados con algún objeto psicológico que conduce al sujeto a actuar y expresarse según ellos, es decir, en cada uno de sus actos y opiniones.
- En Anastasi y Urbina (1998) las definen como una predisposición evaluativa (positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento.
- En Gómez-Chacón (2000) se dice que las actitudes son un campo de creencias, sentimientos y estado de ánimo que trascienden el dominio de la cognición.
- En Guerrero, Blanco y Vicente (2002) las conceptualizan como una predisposición conformada de acuerdo con una serie de convicciones y sentimientos que hacen que el sujeto reaccione con sus creencias y sentimientos.

De acuerdo con estos conceptos, se puede sintetizar que las actitudes vienen a ser predisposiciones comportamentales u orientaciones afectivas que un sujeto adquiere y que acompaña con una reacción valorativa y evaluativa, manifestada a través del agrado o desagrado, hacia algún objeto, sujeto o situación. Es decir, son predisposiciones o juicios valorativos o evaluativos, favorables a desfavorables, que determinan las intenciones per-

sonales de los sujetos y son capaces de influir sus comportamientos o acciones frente al objeto, sujeto o situación (Martínez, 2008).

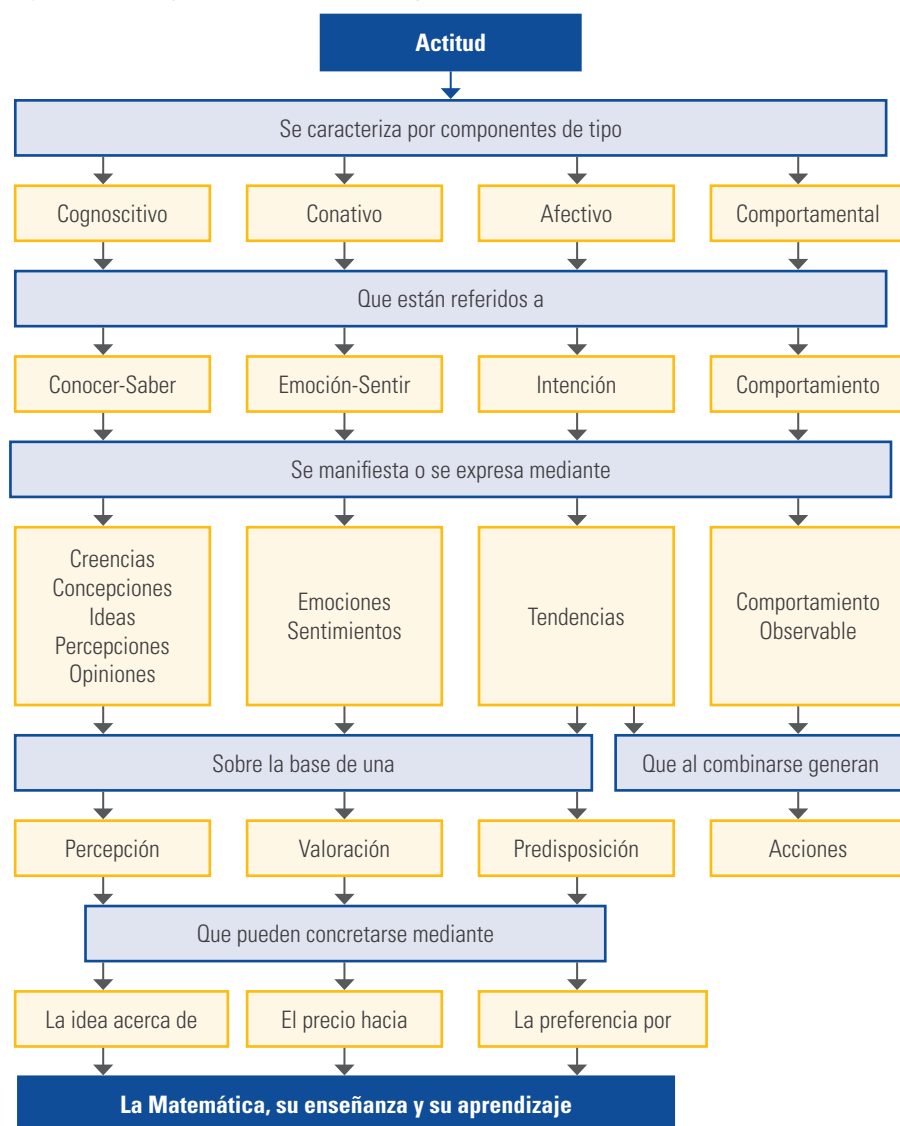
Por consiguiente, las actitudes pueden expresarse mediante factores tales como ideas, percepciones, gustos, preferencias, opiniones, creencias, emociones, sentimientos, comportamientos y tendencias a actuar. Tales factores son especificados por Auzmendi (1992), Bolívar (1995), Myers (1995), Gómez (1998), Cembranos y Gallego (1988), Gallego-Badillo (2000), Gómez-Chacón (2000), Goñi (2007), Martínez (2008) y Caballero, Guerrero y Blanco (2014) y fueron organizados en función de componentes o dimensiones actitudinales que se mencionan a continuación:

1. **Cognitivo (el conocer/ el saber).** Se corresponde con la carga de información y la experiencia adquirida por el sujeto, en correspondencia al objeto de su actitud. Se manifiesta o expresa mediante percepciones, ideas, opiniones, concepciones y creencias a partir de las cuales el sujeto se coloca a favor o en contra de la conducta esperada. La predisposición a actuar de manera preferencial hacia el objeto, persona o situación sujeta a este componente. En Auzmendi (1992) se dice que estos aspectos poseen algunas características que los diferencian de los elementos psíquicos. Estos son:
 - a. **Fijación.** El componente cognitivo de las actitudes está arraigado en el psiquismo humano. Se caracteriza por su carácter fijo y estable, hecho que lo diferencia de la mera opinión.
 - b. **Singularidad.** Se trata de un elemento simple puesto que se refiere a un único objeto, persona o situación.
 - c. **No son valores.** Los valores se caracterizan por su alta abstracción y amplia predictibilidad.
 - d. **Toma de consciencia.** Estos componentes no siempre se expresan en forma consciente.
2. **Afectivo (la emoción/ el sentir).** Este componente se pone de manifiesto por medio de las emociones y los sentimientos de aceptación o de rechazo que el sujeto activa motivacionalmente ante la presencia del objeto, persona o situación que genera dicha actitud. También se remite al valor que el sujeto le atribuye.
3. **Conativo o Intencional (la intención).** Es expresada por los sujetos mediante su inclinación voluntaria de hacer una acción. Está constituido por predisposiciones, predilecciones, preferencias, tendencias o intenciones de actuar de una forma específica ante el objeto, según las orientaciones de las que existen. La tendencia de actuar, favorable o desfavorable, se pone de manifiesto a través de las acciones del sujeto ante el objeto de su actitud.
4. **Comportamental (el comportamiento).** Constituye la conducta observable, propiamente dicha, la cual, según Postic y De Ketele (1992), será concebida como un conjunto de

comportamientos. Es decir, las actitudes no son únicamente creencias sobre un objeto determinado acompañadas de un afecto respecto al mismo, sino disposiciones a reaccionar ante un estímulo (Auzmendi, 1992).

En la figura 4.1, desarrollada por Martínez (2008), se permite observar toda la estructura vinculada al concepto de actitud, la relación establecida entre sus componentes y algunos factores que la conforman:

Figura 4.1: Componentes de la actitud y sus relaciones



Fuente: (Martínez, 2008).

Con referencia a lo anterior, en Martínez (2008) se exponen una serie de singularidades sobre las actitudes:

- Implican una evaluación hacia algo o alguien que se materializa mediante una emoción de juicios valorativos, pudiendo referirse a una o varias cosas, o a una o varias personas o situaciones.
- Suelen ser relativamente estables, determinan las intenciones personales e influyen en el comportamiento de los sujetos.
- Actúan como motivadoras de la conducta y pueden constituirse en la única motivación para emprender el comportamiento y las acciones de los sujetos.
- Pueden expresarse mediante el lenguaje verbal y no verbal.
- No siempre tienen relación con la conducta transmitida por el sujeto, pues, esto depende de otros factores intervinientes. Sin embargo, aunque no toda disposición dé a lugar a la acción correspondiente, suele, dentro de un umbral de la variable, presentar una cierta consistencia.
- No son observables en forma directa por lo que los que las investigan deben utilizar métodos alternativos para su determinación. Para lograr dicho fin, quienes observan las acciones y los comportamientos deben inferirlos. Esto es posible a través de la manifestación de las creencias, sentimientos, intenciones o conductas: verbalizaciones o expresiones de sentimiento acerca del objeto, por finalidad o evitación, tendencia o preferencia manifestada, etc.
- Conformar, junto con la formación teórica inicial de los profesores, sus experiencias y la reflexión sobre estas experiencias, lo que se denomina conocimiento profesional de los profesores.

En la línea de las ideas anteriores, se puede agregar que las actitudes son el resultado de un aprendizaje cultural y, en consecuencia, no son innatas y difieren en función del ambiente donde el sujeto las aprende (Martínez, 2008). Eso supone que, para analizarlas, suele considerarse el contexto donde se manifiestan y las interacciones que se producen entre los actores que protagonizan los comportamientos y las acciones debidas a ellas. Además, las actitudes juegan un papel que puede ser útil para la descripción, comprensión o explicación de una parte de la cultura de las aulas ya que, junto con las tradiciones, pueden ser perdurables y compartidas por grupos de personas y pueden ser transmitidas de generación en generación (Myers, 1995).

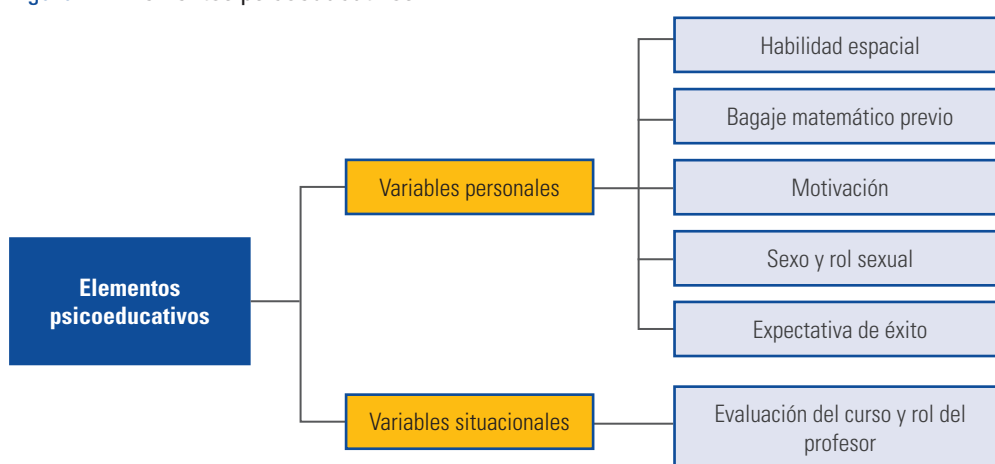
4.3 FACTORES QUE INFLUYEN EN LAS ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS

En las investigaciones desarrolladas por Gil (2000), Martínez-Padrón (2003), Goñi (2007), Gómez-Chacón (2009) y Caballero, Guerrero y Blanco (2014) se hace referencia a que las creencias y las emociones son factores elementales, y las describen de la siguiente manera:

- Las creencias son consideradas conocimientos subjetivos y son concebidas como un referente cognitivo que sirve de soporte para condicionar, de alguna manera, lo afectivo de los sujetos, predisponiéndolos a actuar según ellas. Son pensadas como verdades personales, representan construcciones que realiza el sujeto en su proceso de formación para entender su mundo, naturaleza o su funcionamiento y juegan un papel preponderante tanto en la generación de comportamientos y acciones específicas, como en la mediación para la comprensión de las mismas.
- Las emociones corresponden con un fenómeno de tipo afectivo que un sujeto emite en respuesta a un suceso, interno o externo, que tiene para él una carga de significado. Estas reacciones psicofísicas, de carácter momentáneo, suelen estar acompañadas de expresiones orgánicas características asociadas con pensamientos, motivaciones, experiencias, elementos hereditarios, cogniciones, estados psicológicos y biológicos y tendencias a actuar. También se asocian con la ira, el odio, la tristeza, el temor, el placer, el amor, la sorpresa, el enojo, el miedo, la frustración, el desagrado, el disgusto o la vergüenza. Por lo tanto, se estaría hablando de emociones cuando, por ejemplo, en la clase de matemáticas los estudiantes se exasperan o muestran nerviosismo, fobia, pánico o placer por dicha clase, pudiendo las negativas obstaculizar las habilidades intelectuales y, como consecuencia, la capacidad de aprender.

También en Auzmendi (1992) se señala que existen elementos psicoeducativos que se relacionan con las actitudes hacia las matemáticas. En este trabajo, dichos elementos se agrupan en variables personales y variables situacionales. Véase en la figura 4.2 la clasificación propuesta:

Figura 4.2: Elementos psicoeducativos



Fuente: (Auzmendi, 1992).

De tal manera, en Auzmendi (1992) se definen estos elementos psicoeducativos desde la siguiente perspectiva:

- Habilidad espacial. Es el aspecto netamente cognitivo, el cual puede estar afectando no sólo a nivel conductual y cognitivo de la persona, sino también en el plano afectivo.
- Bagaje matemático previo. Es la experiencia subjetiva de la persona que puede condicionar sus reacciones futuras. Es decir, la mayor o menor exposición previa hacia la materia puede condicionar los sentimientos o conductas posteriores ante la misma.
- Motivación. Ésta se entiende como motivación intrínseca o motivación extrínseca que influye, en gran medida, en las actitudes que se desarrollan hacia el campo de las matemáticas.
- Rol sexual. Es el papel que adopta la persona, hombre o mujer, en el desarrollo de las habilidades matemáticas y en el logro de éstas.
- Expectativas de éxito. Son las creencias de hombres y mujeres sobre sus posibilidades de éxito en el campo de las matemáticas.
- Evaluación del curso y del profesor. Se trata de las evaluaciones efectuadas por los estudiantes a la asignatura y al profesor. También se ve como una evaluación hacia ellos mismos: una evaluación como individuos y una evaluación como grupo.

Asimismo, existen otros factores del dominio afectivo que pueden servir de soporte para describir, comprender o explicar los comportamientos o las acciones exhibidas por los actores que protagonizan el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Estos son los sentimientos, las ideas y las opiniones (Martínez, 2008). Es decir, en palabras de Lexus y Martínez-Padrón (2003), la actitud hacia un objeto o situación puede estar ligada o no a una creencia o a una emoción, pero también puede estarlo a una idea, a una opinión, o a un sentimiento en los siguientes términos:

- Las ideas como objetos del pensamiento humano que indican el aspecto anticipatorio y proyector de la actividad humana, constituyéndose en representaciones abstractas y generales de un objeto.
- Las opiniones como manifestaciones orales o escritas, con las cuales un sujeto expresa su juicio respecto a un objeto. No obligan la incorporación de pruebas que demuestren la aserción, declaración, conocimiento o creencia.
- Los sentimientos como la impresión que los fenómenos de conocimiento producen en el sujeto. Tienen mayor duración que las emociones y permiten manifestar o expresar experiencias agradables o desagradables, que afectan de modo subjetivo a la totalidad del sujeto.

A manera de conclusión, se puede señalar que estos factores forman parte del conocimiento subjetivo y pueden constituirse sobre la base de reacciones emocionales automatizadas y producidas por una creencia sobre sí mismo, sobre las matemáticas o sobre los procesos ligados a ella. También condicionan la manera de enseñarla, repercu-

tiendo en cómo los estudiantes la aprenden o son evaluados, teniendo eso que ver con el éxito o con el fracaso de los protagonistas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Esto se debe, además, a que los niveles de frustración, interés, alegría, gusto, repugnancia, apego, incertidumbre, miedo, aversión, desanimo, resistencia o preocupación suelen condicionar actuaciones.

4.4 PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA, APRENDIZAJE Y EVALUACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

En las investigaciones relacionadas con la educación matemática se puede encontrar que hay quienes piensan que las matemáticas son difíciles de aprender, que gustan a un reducido grupo de estudiantes, que es misteriosa, aburrida, compleja y que es aborrecida u odiada por quienes no la entienden generando, en consecuencia, frustración, angustia y aversión casi colectiva, en vez de satisfacciones por los logros obtenidos. Una realidad así volvería difícil tanto su enseñanza como su evaluación pues, seguramente, los resultados serían deficientes y generarían gran preocupación entre los actores involucrados en esos procesos (Martínez-Padrón, 2005).

Esta problemática se torna más grave cuando se hace referencia a la formación matemática y didáctica del profesorado que actualmente enseña matemáticas ya que se han encontrado casos donde la enseñanza ha sido catalogada como muy deficiente. Por ejemplo, en Martínez-Padrón y González (2005) se determinó que la mayoría de los enunciados de los problemas de matemáticas que los profesores elaboran para que sean desarrollados por sus estudiantes tienen problemas de construcción. También en Godino (2002) y Contreras (2002) se indicó que existen profesores de matemáticas que tienen tanto problemas de conocimiento como deficiencias para gestionar las dificultades que se les presentan a los estudiantes. Esto se evidencia cuando los profesores cometen errores similares a los de sus estudiantes y cuando dan muestra de no poseer suficientes recursos cognitivos para responder a las tareas matemáticas.

Situaciones como las anteriores, para Martínez (2008), dan lugar a un frágil y deficiente desempeño profesional que atenta contra:

- La consolidación de prácticas pedagógicas que reconozcan y manejen adecuadamente los conocimientos previos de los estudiantes.
- La organización de experiencias apropiadas para desarrollar aprendizajes significativos en función de contextos particulares.

- La selección de estrategias adecuadas para el logro de determinados aprendizajes en sujetos particulares.
- La consideración de contenidos actitudinales y otros referentes afectivos que suelen ser relevantes en las decisiones que se toman en el aula.

Sobre la base de lo anterior, en Gómez (1998), Gómez-Chacón (2000) y Martínez-Padrón (2005) conjeturan que, para conducir, con éxito, el proceso de enseñanza-aprendizaje y evaluación de las matemáticas se requiere, además de conocer los contenidos a enseñar y de saber transponerlos didácticamente en forma adecuada, saber elegir las mejores estrategias para evaluarlos y considerar el efecto de los estudiantes en el desarrollo de estos procesos. En este sentido, los estudios sobre las problemáticas existentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas han incorporado variables de tipo afectivo y sociocultural. Este hecho permite corroborar que el factor cognitivo no es el único participante en el aprendizaje, sino que es un proceso compartido entre el ámbito afectivo y el contexto del sujeto que aprende (Planchart, Garbin, & Gómez-Chacón, 2005).

En Cardoso y Vanegas (2012) se cita a Mandler (1989), quien ofreció una de las primeras explicaciones sobre cómo surgen las actitudes y la influencia de la afectividad en el aprendizaje de las matemáticas. Donde Mandler (1989) destaca el aspecto psicológico de la emoción en las actividades numéricas entre lo planificado y la realidad circundante. Según el autor, el estudiante, en la tarea de aprender, recibe estímulos asociados con las matemáticas, como son los problemas, los mensajes o los diálogos con sus compañeros, que le generan cierta tensión y le llevan a reaccionar de forma positiva o negativa. Dicha respuesta se encuentra, además, condicionada por sus creencias sobre él mismo y sobre las matemáticas.

De este modo, si la persona vive en situaciones similares continuamente, entonces se produce la misma clase de reacciones afectivas, generando lo que se conoce como actitud en donde el componente cognitivo es el que define las características de la emoción (miedo, frustración o alegría). Por esta razón, en Gómez-Chacón (2009) se consideró que la trascendencia en el estudio de las actitudes es la vivencia emocional de la materia por parte del estudiante, también entendido como un sistema complejo de elementos emocionales tales como el autoconcepto matemático, las creencias en las matemáticas, la imagen sobre el profesor, entre otros. Por tanto, la percepción de dificultad, el rechazo o el aprecio hacia la disciplina son algunos ejemplos de actitudes definidas como predisposiciones evaluativas que condicionan al sujeto para percibir y reaccionar de un modo determinado (Martínez, 2008).

En Petriz, Barona, López y Quiroz (2010) se define específicamente la actitud hacia las matemáticas como una serie de disposiciones que manifiesta el individuo para aceptar familiarizarse, o no, con determinados contenidos matemáticos. En su investigación describieron que los estudiantes con mayor motivación hacia las matemáticas alcanzaron un mayor nivel de desempeño. Concluyeron, además, que una dosis moderada de ansiedad origina desempeños de alto rendimiento. Además, concluyeron que la preparación de los docentes para esta asignatura se concentra más en los aspectos de contenido, en detrimento de las actitudes, las cuales son necesarias aprender a diagnosticar para, así, contar con la posibilidad de implementar diseños instruccionales apropiados para una educación matemática de calidad.

Por su parte, Pérez-Tyteca, Castro, Rico y Castro (2011) conceptualizan la actitud hacia las matemáticas como la predisposición aprendida por el estudiantado para responder de manera positiva o negativa ante las matemáticas, lo que determina su intención e influye en su comportamiento ante la materia. Así, en su estudio, concluyeron que existen diferencias significativas entre hombres y mujeres en lo que respecta a su ansiedad ante las matemáticas, en donde los primeros son los que sufren menos ansiedad al enfrentarse a las actividades matemáticas. Por su parte, Álvarez y Ruiz (2010) encontraron que los estudiantes de ingeniería manifiestan una actitud globalmente positiva, o sea, reconocen la importancia de las matemáticas en su formación académica y sienten curiosidad e interés por resolver problemas relacionados con los estudios que están realizando. También señalan no sentir entusiasmo, emoción o pasión por las matemáticas. No obstante, admiten que algunos estudiantes presentan dificultad con la disciplina en la medida que no la comprenden, sienten incomodidad, nerviosismo y se sienten incapaces de pensar con claridad ante este tipo de situaciones.

De esta forma, si la persona ha tenido experiencias de aprendizajes positivas con esta conducta, sus actitudes son favorables, y se espera que sus manifestaciones de conducta sean también positivas. Por el contrario, si la valoración hacia dicha disciplina es negativa, entonces las actitudes que se generan también son desfavorables. Por tanto, este término se encuentran fundamentado en las experiencias y situaciones que la persona haya experimentado a lo largo de su vida tanto académica, como laboral (Cardoso & Vanegas, 2012). Así, podría considerarse que dichas actitudes son adquiridas, es decir, se van aprendiendo a partir de diversas experiencias tanto positivas como negativas que el estudiante haya tenido con el objeto de evaluación, con lo cual ha venido trabajando desde la educación preescolar. Desde este punto de vista, algunas de las actitudes y comportamientos más habituales son el rechazo, la negación, la frustración y la evitación, por lo que es necesario realizar un estudio de las actitudes, sobre todo si estos continúan con su formación académica tras haber egresado de sus estudios de grado.

En Schofield (1982) se señala que uno de los aspectos que más correlaciona con la realización matemática es el agrado o temor que la persona siente hacia esta disciplina; dos polos del elemento que comúnmente se denomina ansiedad hacia las matemáticas. Así, es importante desarrollar actitudes positivas en los estudiantes, lo que facilitaría un cambio en las creencias y expectativas hacia la materia y favorecería su acercamiento hacia ésta. En consecuencia, es prioritario investigar, desde el inicio de un ciclo formativo, el tipo de actitudes que poseen los estudiantes (Cardoso & Vanegas, 2012). También, en Auzmendi (1992) se recalca que, si algo es agradable, resulta más fácil de aprender, lo cual tiene un efecto positivo en el desempeño académico de los estudiantes.

Igualmente menciona que los factores que afectan en la actitud hacia las matemáticas son el agrado, la ansiedad, la utilidad, la motivación y la confianza. Todos estos constructos son relevantes para analizar desde el inicio del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Lim, Tso y Lin (2009) estudiaron recientemente estos constructos, y encontraron que las actitudes hacia las matemáticas se manifiestan como un fenómeno multidimensional. En otras palabras, se afirma que estos elementos influyen en el aprendizaje de los estudiantes en tanto que les brinda un panorama de las conexiones de las matemáticas con el mundo real.

De esta manera, Cacioppo y Gardner (1999) afirman que el agrado hace referencia al nivel en que las personas se sienten bien o felices con el objeto de estudio. En otras palabras, se relaciona con el gusto y el placer, así como con la complacencia experimentada en una situación en particular. Por su parte, la ansiedad hacia las matemáticas es entendida como una conducta neurótica caracterizada por un miedo excesivo a cometer errores, un pánico importante cuando falla la memoria y una ignorancia sobre cómo resolver un problema (Cardoso & Vanegas, 2012). Más aún, al tratarse de una conducta negativa, se asocia a la disminución en el grado de atención, a una interferencia en la recogida de la información desde la memoria y a una menor eficacia en el razonamiento (Auzmendi, 1992; Anastasi & Urbina, 1998).

Otro punto importante, es la utilidad entendida ésta como el dominio que mide el valor que le otorga el sujeto a las matemáticas, tanto desde el panorama racional y cognitivo, como desde la óptica afectiva y social (Lim, Tso, & Lin, 2009). Entretanto, la motivación es interpretada como el impulso del sujeto a actuar de una manera determinada. Ese impulso puede ser generado por los procesos mentales internos del sujeto. La motivación concierne a la dirección activa de la conducta hacia ciertas categorías preferenciales de situaciones u objetos (Santrock, 2010). Finalmente, la confianza hace alusión a la seguridad o esperanza firme que una persona tiene de otra, de un objeto o de sí misma ante una determinada situación. Por consiguiente, se trata de una actitud positiva relacionada con la capacidad

de actuación, la cual es un concepto dinámico que varía en el tiempo, se desarrolla, se constituye, declina e, incluso, vuelve a aparecer (Conejeros, Rojas, & Segure, 2010).

4.5 ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS Y ACTITUDES MATEMÁTICAS

La NCTM (1989), Callejo (1994), Gómez-Chacón (2000), Goñi (2007), Martínez (2008) y Caballero, Guerrero y Blanco (2014) sustentan que cuando el objeto son las matemáticas, es posible hablar de la actitud hacia las matemáticas y la actitud matemática, que se definen a continuación:

- La actitud hacia las matemáticas, se refiere a la valoración, el aprecio, la satisfacción, la curiosidad y el interés tanto por la disciplina, como por su aprendizaje, acentuando más el componente afectivo que el cognitivo. En este caso, se pueden observar situaciones donde las matemáticas son valoradas por la posibilidad que da para resolver problemas cotidianos, la posibilidad de aplicarla en otras ramas del conocimiento, su belleza, su potencialidad y su simplicidad al ser usada como lenguaje y estar conformada por métodos propios (Martínez, 2008).
- La actitud matemática tiene un carácter marcadamente cognitivo y se refiere al modo de utilizar capacidades generales como la flexibilidad de pensamiento, la apertura mental, el espíritu crítico, la objetividad, etc., que son importantes en el trabajo en matemáticas (Gómez-Chacón, 2000). De esta manera, se destaca el carácter cognitivo antes que el afectivo que impera en la categoría anterior.

En este sentido, Gómez-Chacón (2000) realiza una clasificación de estas categorías, las cuales se reflejan en la tabla propuesta por Martínez (2008):

Tabla 4.1: Categorías de las actitudes cuando el objeto es la matemática

Categoría	Actitud
Actitudes hacia la Matemática	• Hacia las matemáticas y los matemáticos (aspecto social de las matemáticas). • Hacia las matemáticas como asignatura. • Hacia determinadas partes de las matemáticas. • Hacia los métodos de enseñanza de las matemáticas. • Interés por el trabajo matemático y científico.
Actitudes Matemáticas	• Flexibilidad del pensamiento • Apertura mental. • Espíritu crítico. • Objetividad • Otras capacidades

Fuente: (Martínez, 2008).

También, Gómez-Chacón (2000) cita el estándar de la NCTM (1989; 1991) que se relaciona con la categoría actitud matemática:

“la actitud matemática es mucho más que una afición por las matemáticas. A los estudiantes podrían gustarles las matemáticas, pero no demostrar el tipo de actitudes que se indican en este estándar [se refiere a la flexibilidad, el espíritu crítico...]. Por ejemplo, a los estudiantes podrían gustarles las matemáticas y a la vez creer que la resolución de problemas constituye siempre la búsqueda de una respuesta correcta de la manera correcta. Estas creencias, a su vez, influyen sobre sus acciones cuando se enfrentan a la resolución de un problema. Aunque estos estudiantes tengan una disposición positiva hacia las matemáticas, no muestran sin embargo los aspectos esenciales de lo que se viene llamando actitud matemática” (Gómez-Chacón, 2000, p. 24).

En síntesis, Gómez-Chacón agrega que para que los comportamientos de los sujetos, debidos a sus actitudes matemáticas, “puedan ser considerados como actitudes hay que tener en cuenta la dimensión afectiva que debe caracterizarlos, es decir, distinguir entre lo que el sujeto es capaz de hacer (capacidad) y lo que prefiere hacer (actitud)” (Gómez-Chacón, 2000, p. 24).

Por otra parte, las emociones juegan un papel importante ya que son respuestas organizadas más allá de la frontera de los sistemas psicológicos, incluyendo lo fisiológico, cognitivo, motivacional y el sistema experiencial. Surgen en respuesta a un suceso, interno o externo, que tiene una carga de significado positiva o negativa para el individuo (Gómez-Chacón, Contreras, & Blanco, 2002).

4.6 EL MODELO DE MANDLER EN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

En Gómez-Chacón (2000) se estudia el modelo de Mandler que destaca el aspecto psicológico de la emoción. En este modelo la emoción se ve como una interacción compleja entre el sistema cognitivo y el sistema biológico. De las experiencias emocionales derivan factores como la activación (arousal), específicamente la activación del sistema nervioso autónomo, y la evaluación cognitiva que será la que determine la cualidad de la emoción. El sistema nervioso autónomo corresponde a ciertos eventos que requieren interrupción cognitiva. La activación autónoma se produce por la interrupción y discrepancias entre los pensamientos y las acciones. Será pues la desconfirmación o frustración de una expe-

riencia, o la no finalización de algo ya iniciado, lo que conducirá a la activación del sistema nervioso autónomo (Gómez-Chacón, 1997).

En relación al sistema cognitivo, y según este modelo, la evaluación será la que defina la cualidad de la emoción. En el momento de realizar la evaluación algunas emociones se manifiestan transculturalmente como: el miedo, el orgullo, etc. No obstante, en dicho proceso de evaluación se pueden presentar diferencias individuales y culturales. Para Mandler existen tres fuentes de evaluación cognitiva:

- Evaluaciones innatas, por ejemplo, preferencia de lo dulce ante lo amargo.
- Evaluaciones aprendidas culturalmente, por ejemplo, la moda.
- Evaluaciones de base estructural, por ejemplo, la preferencia por lo conocido frente a lo desconocido.

Figura 4.3: Modelo de Mandler



Fuente: (Gómez-Chacón, 2000).

En este modelo, la interrupción se define como desconfirmación de una expectativa o la no finalización de una acción iniciada. En Gómez-Chacón (2000) se señala que la emoción emerge cuando hay conflicto entre los planes y la realidad, o entre los planes mismos. Es decir, las emociones estarían asociadas a reorganizaciones del sistema cognitivo a partir de estos conflictos. En palabras de Mandler (1989):

“he discutido que en la gran mayoría de las ocasiones el despertar visceral sigue a la aparición de alguna discrepancia cognitiva o conceptual o a la interrupción y el bloqueo de una acción que se está desarrollando en ese momento. Esas discrepancias o interrupciones dependen, en una gran medida, de la organización de las representaciones mentales sobre el pensamiento y la acción. Dentro de los límites de la teoría de esquemas, estas discrepancias ocurren cuando las expectativas de algún esquema son muy elevadas. Éste es el caso tanto si el suceso que viola el esquema es peor o mejor que las expectativas acerca del mismo, tiene que ver con el despertar visceral tanto en las ocasiones desagradables como las alegres. Muchas emociones suceden después de esta discrepancia, porque la discrepancia produce el despertar visceral. La combinación de este despertar o excitación con una cognición evaluativa del suceso en ese momento

produce la experiencia subjetiva de emoción. No digo que las emociones son interrupciones, discrepancias, bloqueos, frustraciones, novedades, etc.; son ocasiones que provocan la actividad del sistema nervioso autónomo... Las discrepancias pueden ocurrir por una variedad de distintas expectativas. Nosotros raramente operamos por la guía de un sólo esquema (...) La emoción es la concatenación de un proceso evaluativo y un despertar del sistema nervioso autónomo” (Mandler, 1989, p. 6).

Las nuevas situaciones se evalúan a partir de los esquemas preexistentes. La incongruencia o necesidad de acomodación de un nuevo estímulo al esquema preexistente conducirá a una activación fisiológica y a estados evaluativos positivos o negativos. Por tanto, la construcción de la emoción consiste en la concatenación, en la consciencia de algún esquema cognitivo evaluativo juntamente con la percepción de un despertar visceral (Gómez-Chacón, 2000). Mandler (1989) también señala la importancia de la capacidad consciente en la construcción de las emociones e indica su función adaptativa en la relación entre emociones y discrepancias y el sistema nervioso autónomo. En DeBellis y Goldin (2006) se considera que las emociones ocurren en tiempos importantes de la vida del organismo y, cuando éstas se focalizan, pueden servir para preparar al organismo para una respuesta más afectiva tanto del pensamiento, como de la acción.

El estudio de los valores, para Mandler (1989), juega un papel central en orden al cambio de clima emocional, siendo importante el papel del valor para los argumentos constructivistas de la emoción: “vivimos en un mundo de valor y afecto, los temas que determinan nuestras construcciones conscientes a menudo requieren un contenido afectivo” (Mandler, 1989, p. 5). En Gómez-Chacón (2000) se destacan dos características de las emociones, la de valor y la de intensidad:

“de los posibles análisis de las emociones, en el lenguaje común sobre las mismas, Mandler se ha fijado en dos características: la noción de que la emoción expresa algún aspecto de valor, y la afirmación de que las emociones son intensas. El problema de la evaluación cognitiva para ser común a todas las teorías de la emoción en los últimos años, ha habido una búsqueda activa de las bases de estas estructuras evaluativas. Básicamente, las evaluaciones cognitivas requieren una teoría de las representaciones del valor” (Gómez-Chacón, 2000, p. 39).

En cuanto a la educación matemática, Mandler (1989) señala la función del valor en relación al cambio emocional:

“la naturaleza de nuestras emociones está en función de los valores que operan y están involucrados en las emociones que ocurren. El papel de los valores es una cuestión central ante un cambio del clima emocional en la resolución de problemas matemáticos. Los padres, los profesores, los iguales, son los principales transmisores de valores culturales, de valoraciones positivas o negativas que el estudiante impone a su mundo. Necesitamos estar atentos a la transmisión cultural de valores... Me gustaría ver más investigaciones en valores matemáticos. ¿Cuáles son las actitudes de los chicos y de los adultos hacia la matemática y cómo éstas varían a través de las clases, de los diferentes subgrupos de nuestra cultura? ¿Cuáles emergen con más intensidad?” (Gómez-Chacón, 1997, p. 58).

Mandler (1989) destaca la necesidad de considerar, en el proceso emocional, la transmisión de valores culturales y concepciones sobre las matemáticas que hace el entorno próximo al estudiante. Los procesos de aprendizaje se contemplan como ámbitos privilegiados de este proceso:

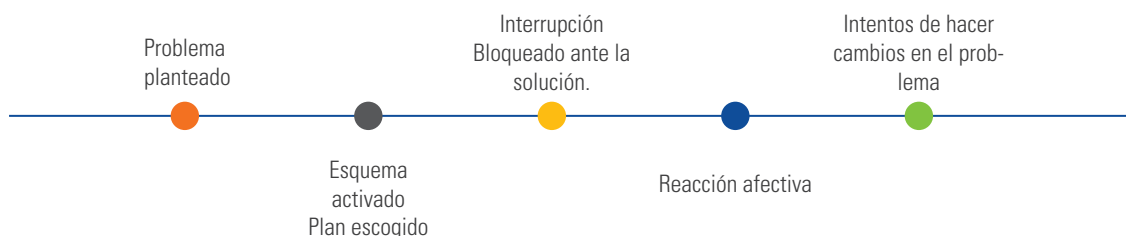
“mi mayor interés aquí es que nos centramos en el proceso de aprendizaje como creador de discrepancias e interrupciones, sobre todo en la producción de errores como sucesos inesperados, así como en los valores (reacciones evaluativas) que pueden surgir en el transcurso del proceso de aprendizaje. Lo mejor que podemos hacer al presente es entender cómo el aprendizaje y el afecto se relacionan, cómo interactúan y cómo su inevitable simbiosis puede ser puesta a disposición del estudiante y de nuestra sociedad” (Gómez-Chacón, 2000, p. 39).

Para Mandler (1989) resulta trascendental que los profesores de matemáticas sean conscientes de cómo la reacción emocional en el aprendizaje de las matemáticas puede estar ligada a la comunicación e interacción en el aula, a la interacción social y al contexto cultural. Son estos fenómenos los que dan forma y significado al proceso emocional:

“las condiciones de las interacciones interpersonales que llevan a la interrupción y a la discrepancia y, por tanto, a las reacciones emocionales. Cuando una relación está anclada, está hecha una gran masa (cuando las acciones de un individuo dependen de las acciones de otro) entonces las dos personas involucradas en esa relación se pueden convertir en ocasión para las interrupciones respectivas” (Gómez-Chacón 2000, p. 40).

En la práctica de resolución de problemas, los factores afectivos surgen de las respuestas emocionales a la interrupción de los planes. Por lo cual, en la teoría de Mandler se propone un modelo aplicado al estudio de las emociones en la resolución de problemas matemáticos. Véase la figura 4.4:

Figura 4.4: Síntesis del modelo de Mandler



Fuente: Elaboración propia.

En Gómez-Chacón (1997) se declara que los planes surgen a partir de la activación de un esquema. El esquema produce una secuencia de acciones y, si la secuencia anticipada de acciones no puede llevarse a cabo, se sigue el bloqueo o discrepancia por una respuesta fisiológica. Ese despertar fisiológico se siente, de modo típico, como un aumento en el ritmo cardíaco o de la carga muscular y sirve como mecanismo para dirigir la atención del individuo. Simultáneamente, el individuo intenta evaluar el significado de ese inesperado o perturbador bloqueo. La evaluación de la interrupción podría ser clasificada como una sorpresa agradable, una irritación desagradable o, incluso, como una catástrofe importante. La evaluación cognitiva de la interrupción proporciona el significado de la activación o “arousal” (Gómez-Chacón, 2000, p. 40).

Para Gómez-Chacón (2000) el significado de las interrupciones se puede analizar secuencialmente. En principio, el significado proviene de la interpretación cognitiva de la activación, “arousal”, y dependerá de lo que el individuo considere o asuma verdadero. A continuación, la activación que conduce a la emoción generalmente no dura mucho: los individuos se suelen ajustar al hecho inesperado, interpretarlo en el contexto en que se da, y tratar de encontrar otro modo de llevar a cabo su plan y conseguir su meta. Finalmente, las interrupciones repetidas en el mismo contexto dan como resultado, habitualmente, emociones que se hacen menos intensas. Es decir:

“se reduce la exigencia en el proceso cognitivo y se responde de modo más automático y menos intenso a medida que se producen las nuevas interrupciones. Las respuestas en esta situación se hacen más estables y predecibles, y comienza a parecerse a la clase de actitudes que han constituido el centro de la investigación tradicional sobre el afecto en la formación matemática” (Gómez-Chacón, 2000, p. 40).

En este contexto, Gómez-Chacón (2002) afirma que, en el ámbito educativo, el arousal puede ser relativo a cualquier sentimiento positivo o negativo. La interpretación, por supuesto, estará influida por múltiples factores, incluyendo la experiencia previa del estudiante con la resolución de problemas.

Por otra parte, en Mandler (1989) y Gómez-Chacón (1997; 2000) se expresa que la perspectiva de la emoción es una interacción compleja entre el sistema cognitivo y el sistema biológico y se destaca el papel indiferenciado de la activación fisiológica en la producción de la emoción. La teoría de la discrepancia desarrollada por Mandler (1989) proporciona/ofrece una explicación plausible a la forma en que las creencias de los estudiantes y su interacción con situaciones de resolución de problemas conducen a respuestas afectivas. O sea, cuando la instrucción en la clase es radicalmente diferente de lo que los estudiantes esperan, estos estudiantes experimentan discrepancia entre sus expectativas y sus experiencias, y estas discrepancias son posiblemente el efecto de fuertes respuestas emocionales (Gómez-Chacón, 2000).

La teoría de la discrepancia de Mandler puede ser útil para investigar el sistema de creencias y el afecto. Ciertamente, las reacciones emocionales resultan de discrepancias entre lo que se espera y lo que actualmente se está experimentando, y debería ser posible localizar las reacciones afectivas desde las creencias y expectativas que la originan (Thompson, 1992). La comprensión y expectativas que los estudiantes traen a la clase de matemáticas podrían ser un primer paso en el aprendizaje sobre cómo tratar de forma efectiva su afecto en el transcurso de la instrucción para la resolución de problemas (Gómez-Chacón, 2000).

De acuerdo a esto, Mandler (1989) presenta dos aproximaciones para el estudio de las emociones en la resolución de problemas, denominadas macroanálisis (centrado en las diferencias individuales y la eficacia cognitiva) y microanálisis. La aproximación microanalítica del afecto y de la cognición se da específicamente en la interacción del individuo con la tarea de resolución de problemas:

“cualquier discrepancia en el proceso de resolución de problemas representa un episodio afectivo en potencia. Dichos episodios se pueden ver dentro del contexto de una corriente afectiva general y de cambios de humor. De todas formas, es posible identificar clases de discrepancias e interrupciones que pueden ocurrir en el proceso de resolución de problemas en general y en el razonamiento y aprendizaje matemático en particular. La mayor clase de este tipo de sucesos se puede denominar generalmente errores, cuando el aprendiz piensa algo que es diferente de sus intenciones originales o es diferente por lo que al final termina ocurriendo... Otra clase

de discrepancia se puede denominar sucesos que pueden ser intencionados o no intencionados” (Mandler, 1989, p. 13).

Mandler (1989) destaca que en la resolución de problemas se pueden detectar tipologías de interrupción y de corriente afectiva global. También, invita al profesorado a aprovechar el papel de los errores y las consecuencias afectivas como fuente de aprendizaje:

“los trabajos típicos en errores y fallos humanos prestan poca atención a los problemas de las consecuencias de los errores y, esencialmente no prestan atención a ninguna de las consecuencias afectivas. La ocurrencia de la reacción afectiva en la experiencia de aprendizaje, el despertar producido debido a la discrepancia durante el proceso de aprendizaje y otras experiencias malas son las que construyen nuestras expectativas y nuestros esquemas experienciales. Sucesos que son totalmente inesperados producen un despertar máximo y reacciones afectivas” (Gómez-Chacón, 2000, p. 42).

En relación al ámbito de los instrumentos de medida, Mandler (1989) indica que los métodos macroanalíticos suelen facilitar algunas indicaciones sobre las preocupaciones afectivas de las personas que surgen al realizar un test, las tareas cognitivas que llevan a cabo y otras situaciones similares. Estas disposiciones van a interactuar con las consecuencias emocionales derivadas de los errores específicos, de los fallos de estrategias, etc. Entonces, se pone de manifiesto que en el análisis de una tarea y en el desarrollo del aprendizaje se debe prestar atención a tales factores y señalar diferentes caminos de adquisición de conocimientos para los individuos que reaccionan con mayor carga emocional (Gómez-Chacón, 1997).

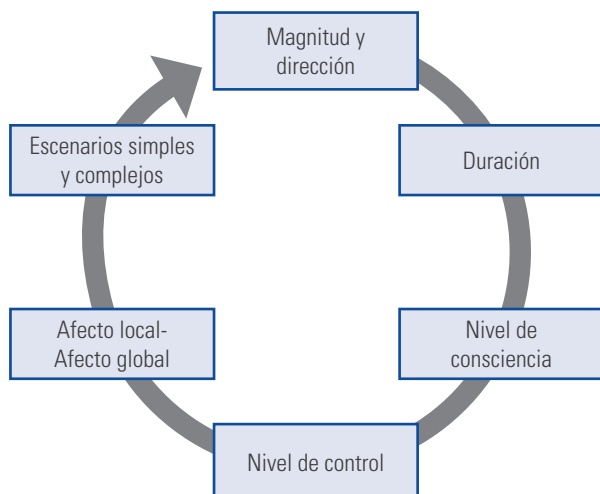
Mandler (1989) destaca que, para trabajar el afecto en la resolución de problemas, es necesaria una información adecuada sobre estrategias de resolución de problemas:

“para manejar el estrés y el afecto de forma eficiente en el proceso de resolución de problemas, el individuo tiene que estar equipado con un conocimiento adecuado del problema, de la tarea y de los diferentes caminos posibles de resolver. En otras palabras, la información inadecuada conduce al estrés, pero el individuo bien informado puede usar el estrés de forma constructiva” (Mandler, 1989, p. 8).

4.7 DIMENSIONES DEL ESTADO EMOCIONAL EN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

En Gómez-Chacón (2002) se señalan algunas dimensiones del estado emocional en el proceso de resolución de problemas matemáticos que se agrupan en la figura 4.5:

Figura 4.5: Dimensiones del estado emocional en la resolución de problemas



Fuente: Adaptado de Gómez-Chacón (2000).

Gómez-Chacón (2000) define estas dimensiones del estado emocional en el proceso de resolución de problemas matemáticos de la siguiente manera:

Magnitud y dirección: Las influencias afectivas en la resolución de problemas varían en su intensidad y magnitud tanto como en su dirección, sea ésta positiva o negativa. Los estudiantes expresan reacciones comunes como la frustración al emprender algo en serio, una reacción que es normalmente intensa y negativa; y otras positivas, como el ¡aja! percibido también de forma intensa. Otras reacciones ante los problemas, tales como el agrado al comprobar que tienen aplicación al mundo real, parecen menos intensas que la frustración o la satisfacción.

Duración de la emoción: Las reacciones afectivas en resolución de problemas son especialmente intensas, pero de relativa corta duración. Los estudiantes mantienen dificultades en resolución de problemas si sus reacciones son intensas y negativas: tienden a abandonar el proceso de resolver el problema y, así, pretenden reducir la magnitud de su emoción. Los estudiantes que perseveran parecen oscilar, alternativamente, entre emociones positivas cuando sienten que han progresado, a emociones negativas cuando sienten que se han bloqueado. En cada dirección la magnitud puede ser bastante significativo.

Nivel de consciencia (Toma de consciencia): Es habitual que los sujetos no sean conscientes de las emociones que influyen en el proceso de resolución de problemas. La falta de consciencia está estrechamente relacionada con la noción de capacidad de procesamiento limitada y la noción de memoria a corto plazo. Aunque los estudiantes puedan percibir su reacción emocional, su consciencia puede no manifestarse. Por ejemplo, la interrupción en el proceso de resolución de un problema puede causar frustración. No obstante, ésta puede reducirse retomando el problema y marcando una nueva meta, o realizando un plan diferente que no se vea interrumpido. En Gómez-Chacón (1997) se manifiesta que la reducción de la frustración ocurre rápidamente, siempre de manera automática, sin ser los estudiantes realmente conscientes de este proceso. Si el sujeto que resuelve problemas es consciente de sus reacciones emocionales, puede mejorar su habilidad para controlar sus respuestas automáticas en la resolución de problemas y lograr, así, un mayor éxito.

Nivel de control: Los estudiantes pueden sentir mayor dificultad para controlar algunas emociones. Por ejemplo, el estudiante que experimenta profundo miedo ante la resolución de problemas puede mostrar dificultades para tener todo bajo control. Sin embargo, en la resolución de problemas las reacciones emocionales típicas pueden ser fáciles de controlar. Cuando un estudiante comprende que la resolución de problemas involucra interrupciones y bloqueos, puede percibir su frustración como parte habitual del proceso y no como una señal que induzca a abandonar el problema. De esta manera, los estudiantes pueden aprender que la alegría que les produce resolver un problema no debe provocar relax y que, en esa situación, es importante continuar resolviendo el próximo problema.

Estas perspectivas de las emociones posibilitan que el estudiante aprenda a revisar soluciones y a buscar soluciones más elegantes y aproximaciones alternativas (Gómez-Chacón, 2000). Los modelos de instrucción en procesos de resolución de problemas pretenden que los estudiantes traten de conocer sus procesos cognitivos y elijan estrategias más afectivas que la de ensayo y error. Del mismo modo, la instrucción en cuestiones afectivas puede ayudar a los estudiantes a controlar sus reacciones emocionales de frustración y alegría en los procesos de resolución de problemas.

Afecto local y afecto global: Para operativizar los aspectos de la interacción de los factores afectivos, cognitivos y culturales que entran en juego en el aprendizaje de la matemática a través de los escenarios simples y complejos, y con objeto de ir generalizando una teoría comprensiva de la dimensión afectiva del sujeto en matemáticas, Gómez-Chacón (2002) distinguen dos constructos: el afecto local y el afecto global:

“el afecto local es el estado de cambio de sentimientos o reacciones emocionales durante el proceso de resolución de problemas de una actividad matemática, a lo largo de toda la sesión de clases. Esta dimensión se indaga a través de escenarios simples (fases de resolución, errores, etc.), y permite establecer la estructura local afecto-cognición, formada por las relaciones conjeturales entre reacciones emocionales y los procesos cognitivos correspondientes a las distintas fases de la resolución de problemas matemáticos. La estructura local expresa tipos de interacción cuando el código emocional interactúa con el sistema cognitivo: interrupciones, desviaciones, atajos cognitivos que se pueden expresar a través de distintas rutas” (Gómez-Chacón, 2002, p. 6).

En el estudio realizado por Gómez-Chacón (1997) se pone de manifiesto que, para comprender las relaciones afectivas de los estudiantes con las matemáticas, no basta con observar y conocer los estados de cambio de sentimientos o reacciones emocionales durante la resolución de problemas (afecto local) y detectar los procesos cognitivos asociados con emociones positivas o negativas. Por ejemplo, señalan que las dificultades de comprensión del problema o dificultades de recuperación de la memoria provocan en el sujeto frustración y ansiedad; que la toma de consciencia del progreso personal en el aprendizaje provoca alegría y satisfacción; o que la curiosidad puede favorecer el desarrollo de procesos heurísticos importantes para la planificación indagatoria.

Junto a detectar estas relaciones significativas que se pueden establecer entre cognición y afecto y sus posibles utilizaciones en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, en Gómez-Chacón (2000) se considera necesario que, para comprender la dimensión afectiva del estudiante en relación con las matemáticas, hay que analizarla en escenarios más complejos (afecto global) que permitan contextualizar las reacciones emocionales en la realidad social que las produce.

“el afecto global es el resultado de las rutas seguidas (en el individuo) por el afecto local y que van contribuyendo a la construcción de estructuras generales del concepto de uno mismo² y de las creencias acerca de las matemáticas y su aprendizaje. El afecto global se ha indagado a través de escenarios complejos que contemplan a la persona en su contexto sociocultural y en interacción con los otros. Tienen en cuenta el aprendizaje de las matemáticas como elemento que contribuye a la construcción de la

² La creencia en uno mismo como bueno o malo en el proceso de resolución de problemas; las expectativas de éxito o fracaso ante un problema matemático, y la anticipación de sentimientos, emociones al comenzar o en el transcurso o en el final de la actividad matemática, la identidad social, etc., (Gómez-Chacón, 2000).

identidad social del niño o del joven, y contextualizan las reacciones emocionales en la realidad social que las produce” (Gómez-Chacón, 2002, p. 6).

Es importante conocer y comprender el sistema de valores, ideas, prácticas del contexto y de la cultura, puesto que cumplen la función de establecer un orden que permite al individuo orientarse y le proporciona un código de comunicación. Por tanto, parece conveniente que al trabajar sobre la dimensión afectiva y las matemáticas se aborden las dos estructuras de afecto en el sujeto, la local y la global. Esta última implica contemplar a la persona en situación, conocer los sistemas de creencias del individuo -creencias como aprendiz de matemáticas, creencias sobre las matemáticas, creencias sobre el contexto escolar-, las representaciones sociales y el proceso de construcción de la identidad social del sujeto.

En Gómez-Chacón (2000), el afecto global se toma en cuenta cuando se considera que los sentimientos y actitudes refuerzan las estructuras de creencias. Por ejemplo, un estudiante puede tener miedo a las matemáticas (global) pero, cuando está inmerso en un problema de matemáticas, experimenta variedad de emociones y sentimientos (local), desde la ansiedad, hasta la satisfacción y la sorpresa. Por tanto, se entiende por afecto local al sistema dinámico de cambio de emociones. Las rutas seguidas por el afecto local en interacción con las heurísticas de resolución de problemas pueden provocar resultados positivos o negativos. Éstos influyen en la configuración del afecto global (DeBellis & Goldin, 2006).

En este sentido, para la evaluación de la dimensión emocional de los sujetos, se apunta dos caminos diferentes que deben tenerse en cuenta en relación a los procesos cognitivos y afectivos que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas: uno a través de la representación de la información que trata sobre las reacciones emocionales que afectan momento a momento al procesamiento consciente (afecto local), y otro que tiene que ver con las influencias socioculturales en el individuo y los modos de cómo se internaliza la información y se configura su estructura de creencia y emocional (afecto global).

Escenarios simples y complejos: Gómez-Chacón (2002) utiliza el concepto sociológico de escenario para hablar de lo que hace que una escena se organice tal como se organiza, y muy especialmente, para hablar de lo que está poniendo en juego en un ámbito y en un tiempo concreto, con unos recursos determinados. Siempre que eso mismo vuelva a ponerse en juego en parecidas circunstancias, los sujetos que intervengan volverán a

comportarse, más o menos, del mismo modo porque es a eso a lo que les predispone su aprendizaje individual y social.

4.8 EVALUACIÓN DE LAS ACTITUDES

La psicometría se define en términos generales como el conjunto de métodos, técnicas y teoría implicadas en la medición de variables psicológicas (Muñiz, 2003). Este razonamiento nos hace situar la medición como el proceso de vincular conceptos abstractos con indicadores empíricos, el cual se realiza mediante un plan explícito y organizado para clasificar, y con frecuencia cuantificar, los datos disponibles también denominados indicadores (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010). En educación, se ve el concepto de medida desde la perspectiva de la evaluación. No es una medida simple, sino que lleva inmerso un proceso de emitir juicio de valor sobre las mediciones realizadas. La evaluación puede recaer en aspectos próximos al rendimiento académico y en otros aspectos relacionados con la investigación evaluativa (Gil, 2011). Por tanto, todo proceso de asignación de numerales a entidades está inmerso en dos posibles casuísticas: una relación de orden en la que se establece el dominio de un elemento sobre otro y una relación de proximidad en que se valora la distancia que separa a las entidades.

En la teoría clásica de la medición, se sitúa a la medición como la asignación de números a objetos o eventos de acuerdo con leyes y, en consecuencia, se distinguen diferentes tipos de asignación. Así, el nivel de medida se clasifica en función del tipo de transformación que deja invariante la forma de la escala. Es decir, para Steven citado por Gil (2011) las propiedades de las observaciones empíricas están ligadas al tipo de escala que se va a utilizar.

Según el criterio de Steven los distintos niveles son nominal, ordinal, intervalo y razón de relación. A través de los trabajos de Gil (2011) estos niveles se describen de la siguiente manera:

- **Medidas de tipo nominal.** En la tipología de Stevens, este tipo de medidas son el grado inferior, puesto que los valores de la variable no tienen ninguna relación de nivel o distancia entre ellos. Cada valor es una categoría distinta y sólo sirve de etiqueta o nombre -de aquí la palabra nominal- para la categoría. No asume orden, ni distancia entre las categorías creadas. Por ejemplo, el sexo o la nacionalidad son variables nominales.
- **Medidas de tipo ordinal.** Cuando es posible establecer un orden o rango dentro de las categorías de acuerdo con un criterio, estamos dentro de las medidas ordinales. Este tipo de medidas debe abordar los problemas de clasificación de las categorías y de la medida de las distancias entre ellas.

- **Medidas de intervalo.** En las medidas de intervalo, en orden ascendente de posibilidades de operación, la distancia entre las categorías está definida en unidades iguales y fijas. En las medidas de intervalo lo que se mide es la diferencia entre ellas. Es decir, en una escala de intervalo se puede pasar de una escala a otra por una transformación lineal.
- **Medidas de razón.** Tiene el cero absoluto y con ella se pueden hacer todas las operaciones aritméticas y estadísticas paramétricas.

La construcción de instrumentos de evaluación sigue, en mayor o menor medida, las normas metodológicas habituales de la psicometría. En la investigación en educación el concepto de técnica de recogida de información engloba todos los medios técnicos que se utilizan para registrar las observaciones o facilitar el tratamiento. Dentro de la expresión medios técnicos están inmersos los instrumentos y los recursos.

- Los instrumentos son medios reales, con entidad propia, que los investigadores elaboran con el propósito de registrar información o de medir características de los sujetos. Se trata de medir las variables de interés de un modo objetivo, asignándoles números o indicadores empíricos a través de la clasificación o la cuantificación para acotar bien los fenómenos (Bisquerra, 2012).
- Los recursos son los medios utilizados para obtener y registrar la información.

Entre las técnicas de recopilación de la información están las escalas para medir las actitudes. Una escala es una relación de acontecimientos concretos o categóricos, ante los cuales la respuesta se efectúa mediante un código de valoración preestablecido que nos indica el grado de la presencia de la conducta del objeto de estudio (Gil, 2011). Una actitud, por su parte, es una predisposición aprendida para responder coherentemente de una manera favorable o desfavorable ante un objeto, un ser vivo, una actividad, un concepto, una persona o sus símbolos (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010). Las actitudes, tal y como se ha presentado en el comienzo del capítulo, están relacionadas con el comportamiento que un sujeto mantiene en torno a los objetos a que hacen referencia. Éstas tienen diversas propiedades, entre las que destacan la dirección, positiva o negativa, y la intensidad que puede ser alta o baja. Estas propiedades forman parte de la medición.

En Hernández et al. (2010) se dice que los métodos más conocidos para medir por escalas las variables que constituyen una actitud son el método de escala diferenciales de Thurstone, el escalamiento de Likert y el escalograma de Guttman.

- **Escala diferenciales de Thurstone.** Su característica más importante es que los ítems o afirmaciones relacionadas con la actitud medida tienen un valor que indica su posición en un continuo favorable-desfavorable, de manera que entre todos los ítems cubren

todo el espectro continuo. No se trata, por tanto, exclusivamente y, en primer lugar, de situar a los sujetos, sino de situar a los ítems en el continuo. El supuesto básico es que la respuesta de un sujeto a un ítem concreto refleja su posición en el continuo de la actitud que es la misma que la del ítem: sujeto e ítem están en el mismo lugar. Los sujetos se limitan a escoger los ítems con los que están de acuerdo, o a responder a todos de acuerdo o en desacuerdo- se trata de respuestas dicotómicas- y la puntuación total del sujeto es la suma de los valores de los ítems escogidos. Lo que se espera es que el sujeto no escoja los ítems que estén por encima o por debajo de su propia posición en el continuo (Morales, 2000).

- El escalamiento tipo Likert consiste en un conjunto de ítems presentados en forma de afirmaciones o juicios, ante los cuales se pide la reacción de los participantes. Es decir, se presenta cada afirmación y se solicita al sujeto que exprese su reacción eligiendo uno de los cinco puntos o categorías de la escala. A cada punto se le asigna un valor numérico. Así, el participante obtiene una puntuación respecto de la afirmación y, al final, su puntuación total es la suma de las puntuaciones obtenidas en relación a todas las afirmaciones (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010).
- El escalograma de Guttman se fundamenta en afirmaciones o juicios respecto del concepto y objeto de actitud, ante los cuales los participantes deben manifestar su opinión seleccionando uno de los puntos de categorías de la escala respectiva. Una vez más, a cada categoría se le otorga un valor numérico. Así, el participante obtiene una puntuación respecto de la afirmación y, al final, su puntuación total se obtiene sumando las puntuaciones obtenidas en relación con todas las afirmaciones (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010).

Estas escalas presentan las siguientes características y estrategias en el momento de su construcción:

Tabla 4.2: Principales características en el momento de construcción de una escala

Escalas:	Thurstone	Likert	Guttman
Objetivo	Escalar a personas. Para ello, antes es preciso escalar ítems.	Escalar personas: medir un atributo que sirve para describir a las personas.	Escalar simultáneamente personas e ítems.
Supuesto sobre ítems	Se parte de la hipótesis de que los ítems son diferentes entre ellos: los ítems representan niveles distintos del atributo.	Se parte del supuesto de que los ítems son homogéneos: los ítems son formalmente distintos, pero sirven para medir lo mismo (constituyen replicas).	Se parte de la hipótesis de que los ítems son diferentes entre ellos: los ítems representan niveles distintos del atributo.

Escalas:	Thurstone	Likert	Guttman
Papel de las personas	En la fase de escalonamiento de los ítems, las personas (jueces) cumplen una función básica: constituyen el instrumento de medida para escalar los ítems. En la segunda fase, las diferencias individuales constituyen el objeto de estudio.	Las diferencias individuales constituyen el objeto de estudio.	Las diferencias individuales constituyen el objeto de estudio.
Justificación de los valores escalares	En la primera fase, es preciso comprobar que las opiniones de los jueces son objetivas en tanto que existe acuerdo entre ellos. Si los jueces ofrecen juicios objetivos, entonces servirán para escalar los estímulos. En una segunda fase, los ítems escalados permitirán escalar a las personas.	Es preciso comprobar que las respuestas a los ítems constituyen medidas del atributo que se pretende medir. Es decir, son respuestas coherentes. Si las respuestas son coherentes, entonces podemos agregarlas para escalar a las personas.	Para justificar el escalamiento de las personas y de los ítems, es preciso comprobar que las respuestas son coherentes: cada respuesta está en función del nivel que le corresponde a la persona respecto al atributo que se mide y del nivel que representa el ítem.

Fuente: (Lévy & Varela, 2003, p. 47).

Otras metodologías que se destacan en el ámbito de la evaluación de las actitudes son:

- Diferencial semántico de Osgood. Consiste en una serie de adjetivos extremos que califican al objeto actitud, ante la cual se solicita la reacción del participante. Es decir, éste debe calificar al objeto actitud a partir de un conjunto de adjetivos bipolares. Entre cada par de éstos, se presentan varias opciones y la persona selecciona aquella que en mayor medida refleje su actitud (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010).
- El escalonamiento multidimensional *de Torgerson* es una técnica cuyo fin es elaborar una representación gráfica que permita conocer la imagen que los individuos se crean de un conjunto de objetos por posicionamiento de cada uno en relación con los demás. Esta técnica puede ayudar a determinar qué dimensiones utilizan los sujetos a la hora de evaluar los objetos, cuántas dimensiones utilizan, la importancia relativa de cada dimensión o cómo se relacionan perceptualmente los objetos (Lévy & Varela, 2003).
- La técnica de Q-Sort de Stephenson consiste en un método estadístico que analiza la distribución y la interrelación de actitudes individuales en la evaluación por un grupo de una situación dada. Es decir, se interesa por la subjetividad de la persona; subjetividad descrita por la persona misma y no subjetividad deducida por el investigador. Con este método se busca obtener primordialmente la representación, el modelo que el sujeto se forja en relación a un tema, un problema o una situación compleja, conforme con su marco de referencia personal (Lévy & Varela, 2003).

Desde el panorama del escalamiento, se puede hacer referencia a diferentes tipos de instrumentos de medidas desarrollados a partir de un amplio espectro de posibilidades teóricas y metodológicas. Asiduamente, el término escala aplicado a instrumentos de medida hace alusión a las escalas diferenciales, sumativas o acumulativas clásicas y, en especial, a las sumativas. Las escalas sumativas o de tipo Likert son más populares que las otras debido, en gran parte, a la complejidad que presenta la elaboración de escalas tipos Thurstone y a la limitación de la escala de Guttman en la que se refiere al campo en que puede aplicarse (Lévy & Varela, 2003).

Por otra parte, el análisis de la literatura arroja un resultado de escalas de medidas para evaluar las actitudes y la ansiedad hacia las matemáticas y la estadística. Estas escalas se pueden clasificar en tres categorías: escalas de actitudes hacia las matemáticas, escalas de ansiedad hacia las matemáticas y escalas de actitudes hacia la estadística. En la tabla 4.3, se detalla un inventario de las escalas que se han desarrollado para medir y analizar las actitudes y la ansiedad hacia las matemáticas y la estadística.

Tabla 4.3: Inventario de escalas de actitud y ansiedad hacia las matemáticas y la estadística

Categoría	Actitud
Actitudes hacia las matemáticas	• Escala de actitudes hacia la aritmética de Dutton, 1951. • Escala de actitud hacia las matemáticas de Aiken en 1961, 1974, 1979. • El inventario de actitudes hacia las matemáticas creado por Sandman en 1974. • La escala de actitudes hacia las matemáticas de Fennema y Sherman de 1976. • Escala de actitudes hacia las matemáticas de NAEP y McConeghy en 1985 y 1987. • Escala de actitudes hacia las matemáticas de Gairin, 1987. • Escala de actitud hacia las matemáticas de Auzmendi 1991. • Inventario de actitud hacia las matemáticas de Tapia y Marsh, 2004. • Escala de actitudes de ESO ante las matemáticas de Muñoz y Mato, 2008. • Escala de actitud hacia las matemáticas para alumnos de secundaria Alemany y Lara, 2010. • Escala de actitud hacia las matemáticas de Palacios, Arias y Arias, 2014.
Ansiedad hacia las matemáticas	• Escala de ansiedad manifestada hacia las matemáticas de Taylor, 1953. • TASC de Saranson de Saranson, Davidson, Lighthall y Waite, 1958. • Escala de numero de ansiedad de Gladstone, Deal y Drevdal, 1960. • Escala de ansiedad hacia los conceptos específicos de Cole y Oetting, 1968. • Escala de ansiedad hacia las matemáticas de Richardson y Suin, 1972. • Escala de ansiedad debilitante hacia las matemáticas de Szetela, 1973. • Escala de ansiedad hacia las matemáticas de Sepie y Keeling, 1978. • Escala de ansiedad hacia la estadística de Cruise y Wilkins, 1980. • Escala de ansiedad hacia las matemáticas de Sandman, 1980. • Cuestionario de ansiedad hacia las matemáticas de Meece, 1981. • Escala de puntuación de la ansiedad hacia las matemáticas Plake y Peker, 1982. • Escala de ansiedad hacia las matemáticas de Sandman, 1980. • Escala de ansiedad hacia la matemática de Muñoz y Mato, 2007.

Categoría	Actitud
Actitud hacia la estadística	• El inventario de actitudes hacia la estadística de Roberts y Bilderback, 1980. • La escala de actitudes hacia la estadística, ATS, Wise, 1985. • El inventario de actitudes hacia la estadística, SAS, Roberts y Reese, 1987. • Escala de ansiedad hacia la estadística (STARS) de Cruise, 1985. • Escala de actitud hacia la estadística de Auzmendi, 1991. • Escala de actitud hacia la estadística de McCall, Belli y Madjidi, 1991. • Actitudes hacia la estadística de Sutarso, 1992. • Actitud hacia la estadística de Miller, Behrens, Green y Newman, 1993. • Inventario de actitudes hacia la estadística de Schau, 1995. • Cuestionario de actitudes hacia la estadística de Chang, 1996. • Escala de actitudes hacia la estadística de Cazorla, Silva Vendramini y Brito, 1999. • Escala de actitud hacia la estadística de Velandrino y Parodi en 1999.

Fuente: Elaboración propia:

En estas escalas son numerosas las dimensiones evaluadas. En Auzmendi (1992) se afirma que las escalas de actitudes y ansiedad hacia las matemáticas y la estadística miden factores como:

- Agrado o disfrute que siente la persona al enfrentarse con las matemáticas.
- Ansiedad o estado de temor o angustia de la persona ante las matemáticas.
- Utilidad, valor subjetivo que la persona le atribuye a las matemáticas.
- Motivación del sujeto hacia su estudio y utilización.
- Seguridad, confianza en uno mismo como poseedor de las suficientes facultades para manejarse bien con las matemáticas.
- Percepción del estudiante de las características del profesor.
- Percepción de los alumnos de las actitudes tanto de sus padres (padre y madre) como de sus profesores ante sus propias habilidades en la materia.
- Actitudes del alumno hacia su propio éxito en las matemáticas.
- Sexo, es decir, la consideración sexista de las matemáticas, el dominio del hombre sobre la mujer.
- Las matemáticas y uno mismo, factor que recoge todas las características del individuo en su relación con la materia.
- Las matemáticas como disciplina, factor que hace referencia a las características estáticas de la materia.
- Las matemáticas como proceso, factor que hace referencia a las características dinámicas de la materia.

Todos estos factores dimensionales, Auzmendi (1992) los sintetiza en ansiedad, agrado, utilidad, motivación y confianza. Estos factores dimensionales se configuran en una escala de tipo Likert compuesta por 25 afirmaciones que expresan sentimientos y creencias positivas o negativas hacia las matemáticas. En la tabla 4.4 se presentan estas afirmaciones:

Tabla 4.4: Factores dimensionales de la escala de actitudes hacia las matemáticas

Factores	Ítems
Ansiedad	• La asignatura de matemáticas se me da bastante mal. • Estudiar o trabajar con las matemáticas no me asusta en absoluto. • Las matemáticas es una de las asignaturas que más temo. • Tengo confianza en mí mismo/a cuando me enfrento a un problema de matemáticas. • Cuando me enfrento a un problema de matemáticas me siento incapaz de pensar con claridad. • Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando me enfrento a un problema de matemáticas. • Trabajar con las matemáticas hace que me sienta nervioso/a. • No me altero cuando tengo que trabajar en problemas de matemáticas. • Las matemáticas hacen que me sienta incómodo/a y nervioso/a.
Agrado	• Utilizar las matemáticas es una diversión. • Me divierte el hablar con otros de matemáticas. • Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí. • Si tuviera oportunidad me inscribiría en más cursos de matemáticas de los que son obligatorios.
Utilidad	• Considero las matemáticas como una materia muy necesaria en mis estudios. • Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas. • Espero tener que utilizar poco las matemáticas en mi vida profesional. • Considero que existen otras asignaturas más importantes que las matemáticas para mi futura profesión. • Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las matemáticas. • Para mi futuro profesional la matemática es una de las asignaturas más importantes que tengo que estudiar.
Motivación	• La matemática es demasiado teórica para que pueda servirme de algo. • Las matemáticas pueden ser útiles para el que decida realizar una carrera de “ciencias”, pero no para el resto de los estudiantes. • La materia que se imparte en las clases de matemáticas es muy poco interesante.
Confianza	• Tener buenos conocimientos de matemáticas incrementará mis posibilidades de trabajo. • Me provoca una gran satisfacción el llegar a resolver problemas de matemáticas. • Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las matemáticas.

Fuente: (Auzmendi, 1992).

En Auzmendi (1991) se define cada uno de los factores dimensionales de la siguiente manera:

- **Ansiedad.** Este factor se refiere al sentimiento de ansiedad, temor que el estudiante manifiesta ante la materia de matemáticas.
- **Agrado.** Este factor hace referencia al aspecto de agrado o disfrute que provoca el trabajo matemático.
- **Utilidad.** Este factor hace referencia al valor que el estudiante otorga a las matemáticas, a la utilidad que él percibe que puede tener esta materia para su futura vida profesional.

- **Motivación.** Este factor puede interpretarse como la motivación que siente el estudiante hacia el estudio y utilización de las matemáticas.
- **Confianza.** Este factor puede interpretarse como el sentimiento de confianza que provoca la habilidad en matemáticas.

En este escenario, cabe destacar que la consistencia interna de las escalas de actitudes y ansiedad hacia las matemáticas y la estadística se ha determinado por el alfa de Cronbach. En general, estos indicadores de la consistencia interna suelen ser altos, con valores en mayoría de los casos superiores a 0.80 –mínimo aceptable recomendado por muchos investigadores- y, en muchos casos, superiores incluso a 0.90 (Carmona, 2004). Por ejemplo, en Auzmendi (1992) se aplicó la escala de actitud hacia las matemáticas a una muestra compuesta por 1221 estudiantes de primero y tercero de BUP y COU con un índice de alfa de Cronbach de cada uno de los factores dimensionales y del total de la escala que se indica a continuación:

Tabla 4.5: Fiabilidad de los factores actitudinales de la escala de actitud hacia las matemáticas

Factores	Dimensiones	Alfa de Cronbach
Factor I	Ansiedad	0.9115
Factor II	Agrado	0.8166
Factor III	Utilidad	0.8637
Factor IV	Motivación	0.5604
Factor V	Confianza	0.4975
	Puntuación Total	0.9283

Fuente: (Auzmendi, 1992).

En la tabla 4.5, se visualiza que la puntuación total de la escala es muy elevada. También, se observa que los factores como: ansiedad, agrado y utilidad muestran un índice alto de precisión. Sin embargo, en el factor de motivación y el factor de confianza disminuyen en relación a los anteriores. Según Auzmendi (1992):

“la reducción de los factores se debe porque éstos son menos diferenciados y específicos que los otros, así mismo, menciona que éstos factores están compuestos únicamente por tres ítems y que la consistencia interna hallada a través del método alfa de Cronbach tiene a ser más baja si el número de elementos de que consta la escala es reducida” (p. 92).

En términos de validez de instrumentos, las escalas de actitudes y ansiedad hacia las matemáticas y la estadística están organizadas en función del tipo de evidencia que aporta el proceso de validación de los distintos cuestionarios. En Carmona (2004) se define que la validación es un proceso por el cual se aportan evidencias que apoyen la interpretación propuesta de los datos recogidos mediante la prueba. La validez puede estar basada en el contenido del cuestionario, en su estructura interna y en su relación con otras variables.

Validez de contenido: En Carmona (2004) se expresa que en la escala de actitud hacia la estadística de Cruise (1985) se realizó una adecuación del contenido de los ítems a la estructura de seis factores. Esta estructura se presentó a cinco profesores de estadística y cinco estudiantes de doctorado con las descripciones de las seis subescalas e ítems potenciales para cada una de ellas. La tarea de los evaluadores era determinar a cuál de las subescalas pertenecía cada uno de los ítems. Los resultados obtenidos por estos autores mostraron unos índices que iban de 0.60 a 1, con una media de 0.91, lo cual fue interpretado como una evidencia de la validez aparente de contenido de los ítems.

También Wise (1985) describe el proceso de evaluación del contenido de los ítems inicialmente elaborados de la siguiente manera: “La evaluación de los 40 ítems en términos de su validez de contenido por dos profesores de introducción a la estadística en la educación dio lugar a la eliminación de cinco ítems” (Wise, 1985, p. 4). La metodología utilizada por Wise (1985) se acerca a una evaluación de experto en el contenido, ya que la eliminación de otros cinco ítems se realizó utilizando el índice de discriminación. Dos profesores de estadística diferentes a los anteriores realizaron una evaluación adicional, en este caso explícita, de la adecuación de los 30 ítems restantes para ser respondidos el primer día de clase y cuyo resultado fue la eliminación de otro ítem.

Para Carmona (2004) la evaluación del contenido de los ítems de Cruise (1985) difiere de la realizada por Wise (1985) en dos aspectos. Por una parte, los jueces evaluadores no sólo son profesores. Y por otra, tanto la estructura conceptual, como la relevancia de cada ítem fueron determinadas inductivamente a partir del consenso entre los jueces. En este sentido, Schau, Dauphinee y Del Vecchio (1995) expresan que los jueces clasificaron un conjunto inicial de frase y palabras referidas a las actitudes hacia la estadística en categorías que etiquetaron y definieron con posterioridad. Así mismo, el grupo alcanzó una estructura consensuada de los ítems consistentes en cuatro dimensiones, etiquetadas

como afecto, competencia cognitiva, valor y dificultad (Schau, Dauphinee, & Del Vecchio, 1995). Posteriormente esas palabras y frases se reescribieron en 80 ítems potenciales que, de nuevo, fueron clasificados por cada uno de los jueces en una de las dimensiones propuestas. Los 60 ítems (15 por categoría) que dieron lugar al mayor consenso (habitualmente 80% de acuerdo o mayor) se reescribieron para ser usados de forma adecuada al inicio de un curso de introducción a la estadística (Schau, Dauphinee, & Del Vecchio, 1995).

Validez de estructura interna: El análisis de las evidencias de validez en la estructura interna de una prueba consiste en el estudio del ajuste entre la estructura conceptual del constructo y las relaciones empíricas entre ítems o partes de la prueba (Carmona, 2004). Aunque los análisis de datos implicados debieran depender fundamentalmente de la concepción del constructo. Por ejemplo, en Auzmendi (1991; 1992) el estudio de la estructura interna de la escala se realizó por medio del análisis factorial de la respuesta de los ítems de la escala de modo exploratorio. El resultado de dicho análisis muestra una estructura de cinco factores que da cuenta del 60.7% de la varianza total.

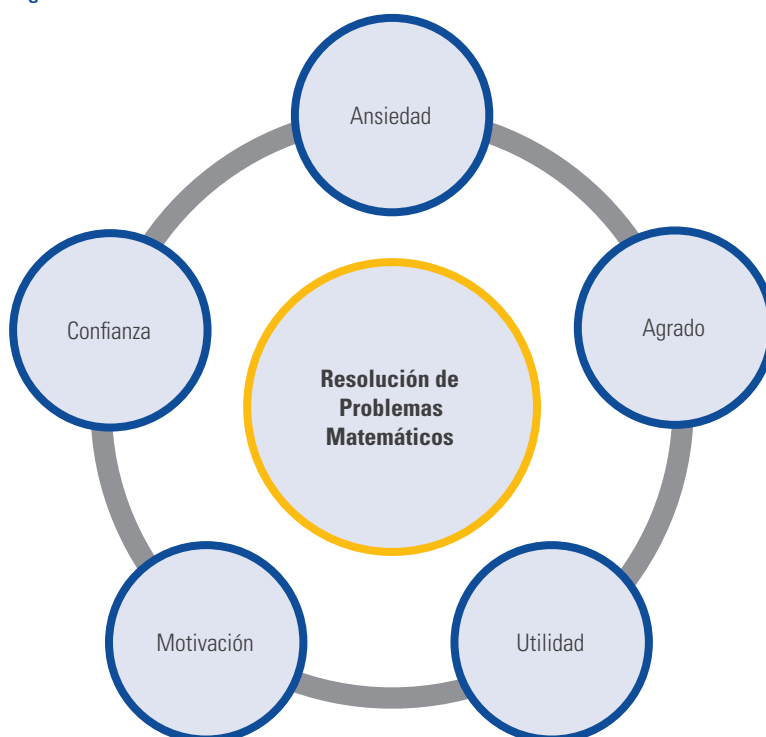
Validez basada en relación con otras variables: Según Carmona (2004) las evidencias basadas en la relación entre las puntuaciones en el test y las variables externas proporcionan una de las fuentes más habituales de validación de las medidas psicológicas. La determinación de cuáles son esas variables externas depende de la teoría relativa al constructo que se pretende medir. Estas relaciones Carmona (2004) las clasifica en tres tipos:

- En primer lugar, el objetivo básico de las escalas de actitudes o ansiedad hacia las matemáticas y estadística es la predicción del rendimiento de los estudiantes en las asignaturas de matemáticas y estadística. La validación en este caso es el estudio de la relación entre las puntuaciones obtenidas y alguna medida del rendimiento de los estudiantes como son las calificaciones en las asignaturas.
- En segundo lugar, la relación que existe entre los diferentes cuestionarios de actitud o ansiedad hacia las matemáticas y estadística. Es decir, se espera que las medidas estén altamente relacionadas puesto que son medidas del mismo constructo.
- Finalmente, el estudio de la utilidad de algunas variables para predecir la actitud o ansiedad hacia las matemáticas y la estadística. Las variables que más se destacan se relacionan con las características personales de los estudiantes como el género, determinadas características de personalidades, experiencia formativa en matemáticas y estadística, y pensamiento auto referidos sobre las capacidades personales.

4.9 CONCLUSIONES

En este capítulo se ha presentado una síntesis de los conceptos clave alrededor de las actitudes y su relación con las matemáticas. Se destaca el modelo de Mandler y las dimensiones del estado emocional en el proceso de resolución de problemas matemáticos. Así, se han puesto de relieve los factores dimensionales (ansiedad, agrado, utilidad, motivación y confianza) que surgen de la aplicación de instrumentos de evaluación, como son las escalas de actitudes hacia las matemáticas. Estos factores dimensionales parecen presentar una relación importante con la resolución de problemas matemáticos, véase la figura 4.6:

Figura 4.6: Relación de los factores dimensionales con la resolución de problemas



Fuente: Elaboración propia.

En este sentido, se entiende que lo cognitivo y lo afectivo parecen ser indisolubles y ambos tienen responsabilidad en las actuaciones evaluativas emitidas por los sujetos ante determinados objetos, personas o situaciones. Esto permite conocer la importancia de lo actitudinal que se materializa al destacar, entre otros aspectos, su capacidad de actuar como motivador de las acciones de los sujetos; por el hecho de tener compromisos con las intenciones personales y con la emisión de sus juicios valorativos. En otras palabras, para lograr cambios importantes en el ámbito de las matemáticas, parece ser necesario considerar estos aspectos actitudinales en relación con las matemáticas que se aprenden, que se enseñan o que se evalúan, sobre todo cuando se sabe que las actitudes hacia las matemáticas configuran parte de las bases que sustentan las decisiones que los estudiantes toman en el momento de la resolución de un problema matemático.

Por esta razón, en el estudio de Tesis Doctoral nos sólo se han abordado aspectos cognitivo de los procesos de resolución de problemas matemáticos, sino los aspectos afectivos, basándonos que, la resolución de cualquier problema matemático lleva asociada una situación afectiva para el sujeto implicado, quien pone en juego no solamente prácticas operativas y discursivas para dar una respuesta al problema, sino también moviliza creencias, actitudes, emociones o valores que condicionan en mayor o menor grado y diferente sentido la respuesta cognitiva requerida.

CAPÍTULO 5:

EL RECONOCIMIENTO DE LA DIVERSIDAD EN LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

“Cualquier discriminación es inmoral y luchar contra ella es un deber por más que se reconozca la fuerza de los condicionamientos que hay que enfrentar. Lo bello de ser persona se encuentra, entre otras cosas, en esa posibilidad y en ese deber de pelear. Saber que debo respeto a la autonomía y a la identidad del educando exige de mí una práctica totalmente coherente con ese saber” (Freire, 1997, p. 472).

5.1 INTRODUCCIÓN

La evolución de la didáctica de las matemáticas está determinada por sucesivas ampliaciones de la problemática didáctica. Cada una de estas ampliaciones comporta cambios en su objeto primario de investigación y, en consecuencia, modifica la naturaleza de la didáctica como disciplina científica. En este capítulo se justifica que el reconocimiento de la diversidad en la didáctica de las matemáticas es un elemento positivo y realista a la hora de abordar la existencia de diferencias individuales en nuestro estudiantado en cuanto a estilos y a ritmos de aprendizaje, según su experiencia escolar, capacidades e intereses.

Así, la diversidad es un recurso en el aula y, vista de esta manera, es un factor de transformación que propone cambios y nuevas configuraciones en las prácticas matemáticas. De este modo, hablar de diversidad es hablar de las relaciones y condiciones de los profesores, de los estudiantes, de los contextos, de las políticas, de los elementos constitutivos de éstas que hacen de la educación un terreno fértil para un desarrollo humano basado en el respeto, la igualdad y equidad en lo individual y lo colectivo.

A continuación se puntualizan, de manera breve, algunos aspectos sobre el reconocimiento de la diversidad en la didáctica de las matemáticas: la diversidad como una condición de la existencia humana; el reconocimiento de la diversidad en los sistemas educativos; la diversidad en educación matemática; la formación de profesores de matemática en y para la diversidad; dinamización del aprendizaje en contexto de diversidad: experiencias matemáticas y didácticas para la interacción; experiencias matemáticas y didácticas entre diversos: enriquecen el aprendizaje de las matemáticas en y para la diversidad; experiencias para el diseño, gestión y evaluación para el aprendizaje de las matemáticas en un contexto de diversidad; los diseños didácticos en el aprendizaje de las matemáticas en y para la diversidad; ambientes interculturales y pluritecnológicos desarrollan el aprendizaje de las matemáticas en y para diversidad; y la evaluación en el aprendizaje de las matemáticas en y para la diversidad.

5.2 LA DIVERSIDAD COMO UNA CONDICIÓN DE EXISTENCIA DEL SER HUMANO

La diversidad humana se refiere a dos aspectos: el natural y el cultural. El natural se vincula con lo heredado biológicamente como puede ser el origen étnico y geográfico, las habilidades y capacidades propias del individuo, género y la familia, etc. El aspecto cultural se relaciona con los entornos de desarrollo humano como formas de gobierno, sistemas económicos, políticos, grupos sociales y culturales, sistemas educativos, oportunidades de

participación y de acceso a la comunicación y las tecnologías (León et al., 2012). Como se puede observar en la tabla 5.1, estos tipos de fuentes de diferencias de tipo biológico y de tipo sociocultural ofrecen dos vertientes de diversidad que confluyen en la constitución de los individuos:

Tabla 5.1: Lo biológico y cultural: vertientes de la diversidad humana

Lo biológico y la cultural: vertientes de la diversidad humana	
Tipo biológico	• Entorno geográfico. • Origen racial. • Género. • Familia. • Habilidades y capacidades propias del individuo. • Estilo de aprendizaje. • Ritmo de aprendizaje.
Tipo cultural	• Formas de gobierno. • Sistemas económicos, políticos y sociales. • Oportunidades de educación. • Participación. • El acceso a las comunicaciones. • Creencias. • Formas de objetivación.

Fuente: León et al. (2012).

A partir de lo anterior, se puede entender la diversidad como una característica de la conducta y condición humana que se manifiesta en el comportamiento y en el modo de vida de los individuos, así como en sus maneras de pensar, y que se hace presente en todos los niveles evolutivos de la vida y en todas las situaciones (Ortíz, 2007). El estado natural del ser humano que, extrapolado al mundo educativo, sería el equivalente al estado natural de toda aquella persona que aprende.

5.3 EL RECONOCIMIENTO DE LA DIVERSIDAD EN LOS SISTEMAS EDUCATIVOS

La diversidad es un concepto educativo postmoderno que hace referencia a individualizar, compensar y promover igualdad de oportunidades consideradas como relevantes desde el punto de vista de la circunstancia de ser diferente (Prado, 2004). Para Prado (2004) educar para la diversidad supone que las instituciones educativas dan cabida a estudiantes con diferentes capacidades, ritmos de aprendizaje, etnias y valores culturales. Así, coincide con Vicente (1999) al decir que la diversidad es una manifestación natural de la individualidad humana y no un déficit que corregir.

En este sentido, el concepto, el manejo y las políticas con respecto a la diversidad han tenido una evolución en la sociedad y, paralelamente, en la escuela (García, 2009). Se puede evidenciar en este ámbito tres momentos:

- En el primero, la diversidad se toma como elemento que permite la marginación desde estándares psicométricos y comparativos, lo que durante mucho tiempo propició la exclusión.
- En el segundo momento, la diversidad ya no se ve como desviación, sino como déficit. En este segundo momento, los esfuerzos fueron direccionados a la normalización para limar la desigualdad y los enfoques integradores enfocaron su trabajo hacia la compensación.
- De este modo se llega al tercer momento, el reconocimiento de la diversidad como una realidad que, en educación, abre paso a la inclusión.

Esta evolución ha traído consigo valores positivos y negativos en la educación en y para la diversidad (León et al., 2012), entre los que se pueden mencionar los siguientes:

Figura 5.1: Valores positivos y negativos del concepto de diversidad



Fuente: Elaboración propia.

Con esta panorámica, y entendiendo que la diversidad es la oportunidad de reconocer al otro como parte constitutiva del entorno que nutre a cada uno de los actores y que orienta las prácticas educativas a la igualdad, la justicia, la equidad, la pertinencia y al desarrollo grupal respetando lo individual, se hace necesario contemplar elementos fundamentales de ésta y que, a su vez, son parte de las normas y políticas educativas. A continuación, se presenta un compendio de las normas y políticas educativas para el reconocimiento de la diversidad en el sistema educativo nicaragüense:

Tabla 5.2: Normas y políticas educativas para poblaciones diversas de Nicaragua

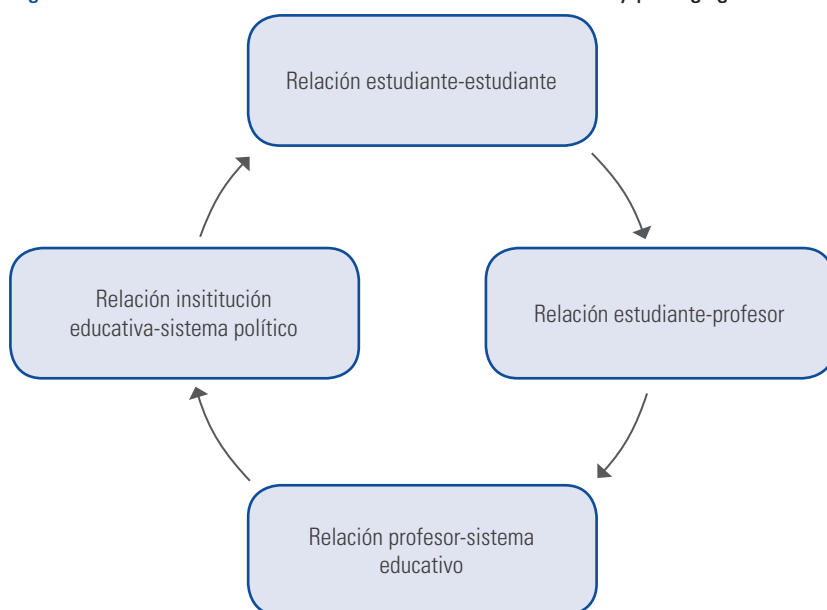
Normas y políticas educativas
• Constitución política de Nicaragua. • Convenio internacional sobre la eliminación de todas las formas de discriminación racial. • Ley general de educación donde se promueve la educación para poblaciones en contexto de diversidad: indígenas, afrodescendientes, mestiza y necesidades educativas especiales. • Sistema educativo autonómico regional donde se promueve una educación en contextos multilingües. • Ley sobre la educación en lenguas en la Costa Caribe. • Ley 202 de prevención, re-habilitación y equiparación de oportunidades para las personas con discapacidad. • Ley 675 para reconocer y regular el lenguaje de señas nicaragüense.

Fuente: Elaboración propia.

Aunque, tal y como atestigua la información en la tabla 5.2, el estado de Nicaragua reconoce la existencia de poblaciones en contexto de diversidad, que gozan de los derechos, deberes y garantías consignados en las normas y políticas, es reciente la formulación de estas normas y políticas que se podrían denominar sobre el derecho a la diversidad y su atención. Este hecho vuelve necesario desarrollar una sensibilidad a la diferencia que permita entender la complejidad de la diversidad y proponerla como una condición de existencia natural para reconocer los derechos de las poblaciones a coexistir de forma individual y grupal (León et al., 2012). Lo anterior constituye una vía de restitución de derechos y oportunidades que permite realizar acciones reflexivas en el vivir cotidiano.

Las relaciones que establecen los protagonistas del acto educativo en contexto de diversidad traen consigo un complejo de elementos que se relacionan entre sí y que determinan la participación de sus actores desde el papel que toman en el proceso educativo o que les sea asignado socialmente (León et al., 2012). Las relaciones fundamentales de orden didáctico y pedagógico, en contexto de diversidad, toman las siguientes caracterizaciones:

Figura 5.2: Relaciones fundamentales de orden didáctico y pedagógico



Fuente: León et al. (2012).

- **Relación estudiante-estudiante:** El encontrarse en contexto de “en y para” la diversidad propone al estudiantado una coexistencia de respeto y oportunidades, de justicia social, de desarrollo ciudadano y de pensamiento crítico (Gurin, 1999; Thomas & Nelson, 2005; León et al., 2012). De dicho contexto deriva un clima de aprendizaje del cual se genera la oportunidad de rescatar, del discurso del otro, elementos enriquecedores para la construcción de la identidad individual y grupal.
- **Relación estudiante-profesor:** Esta relación, que pone en juego el manejo de oportunidades, exige por parte del profesor proponer al estudiante retos abordables que, como señalan Martín y Mauri (1997), son propuestas que dinamizan la transformación de la realidad apoyándose en instrumentos que el profesor proporciona. Estas relaciones generan oportunidades en donde el estudiante es partícipe de su construcción del conocimiento y del contexto en que se está desarrollando. Esto determinará los niveles de participación y la generación de ambientes propicios para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.
- **Relación profesor-sistema educativo:** “Los profesores enfrentan en la actualidad el desafío de dar respuesta de forma equilibrada a lo común y la creciente diversidad presente en todas las escuelas y aulas, como consecuencia de los avances logrados en el acceso a la educación en sus distintas etapas educativas” (León et al., 2012, p. 36). La cobertura en educación que pretenden los diferentes gobiernos está haciendo que más niños y niñas entren al sistema escolar a temprana edad y pueda apuntarse a que “no hay discriminación al acceso a la educación” (León et al., 2012, p. 47). El profesor tiene la responsabilidad de educar en y para la diversidad, pero el sistema educativo tiene

la responsabilidad de formar al profesor para desarrollar procesos de aprendizaje en todos sus estudiantes.

- **Relación institución educativa-sistemas políticos:** Las instituciones educativas están inmersas en ambientes políticos y económicos que, a su vez, “generan profundas transformaciones políticas, económicas y culturales, que afectan al acceso a la información y han producido cambios en la estructura y mentalidad social que hacen que se encuentren en el aula estudiantes diversos, en sus capacidades, intereses, motivaciones y formas de interpretar el mundo” (García, García & Biencinto, 2009, p. 106). En este contexto, León et al. (2012) expresa que las creencias, prejuicios, poder y sentido marcarán, de forma determinante, la diferencia de roles de cada uno de los participantes y su participación, pero las condiciones de recursos y estructuras harán posible el desarrollo de las instituciones en ambientes de diversidad.

Por todo lo expuesto, la diversidad en educación es una condición de existencia tanto del ser humano que se educa, como de las instituciones educativas. Diversidad que se manifiesta de múltiples formas conformando un abanico de posibilidades de interacción educativa con uno mismo, con el otro y con lo otro (León et al., 2012). El ser humano, partícipe del acto educativo, es sujeto socio histórico y cultural que, en ocasiones, se sitúa como aprendiz y en otras como enseñante, aunque deba asumir de manera preferente uno de estos roles porque la institucionalidad se lo ha asignado.

5.4 LA DIVERSIDAD EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La educación matemática siempre ha estado caracterizada por las concepciones ideológicas que determinan los puntos de vista sobre el papel que ha de tener la escuela como configuradora de la sociedad actual y futura y, en consecuencia, sobre su papel en la formación de unos ciudadanos con unas determinadas características y competencias matemáticas (Azcarate, 2001). La enseñanza de las matemáticas tiene lugar en una sociedad y es para los seres humanos que vivirán en esa sociedad (Niss, 1994). La explicación de la función social de la escuela y de los conocimientos que en ella se enseñan, en este caso los matemáticos, y su influencia en el desarrollo individual y social del sujeto se puede interpretar como la triada profesor-estudiante-matemáticas. Desde esta aproximación, serían requisitos para el éxito, interpretado dentro del sistema así definido, que el estudiante posea habilidades cognitivas y la motivación apropiadas y que el profesor sea capaz de transmitir satisfactoriamente el contenido matemático a sus estudiantes (Gorgorió, Prat, & Santesteban, 2006).

Si se considera el aula de matemáticas bajo este esquema, la comprensión de los conocimientos que son objeto de aprendizaje por parte del estudiantado en la escuela son una selección de los saberes relevantes desde el punto de vista cultural (Mauri, 1993). También, la comprensión de la enseñanza y aprendizaje de la disciplina requeriría profundizar, por ejemplo, en el estudio de los aspectos individuales de los estudiantes –ya sean cognitivos o afectivos–, del conocimiento profesional del profesor, de la epistemología de las matemáticas o de la transposición didáctica.

La postura sociocultural nos ayuda a ampliar el enfoque de la educación matemática, en particular cuando el centro de atención es el aula de matemáticas. El enfoque sociocultural define a las matemáticas como un producto humano surgido para dar respuesta a las necesidades de los individuos en cierto momento y lugar de la historia, así como una tarea con motivaciones e implicaciones sociales de la naturaleza social. Es decir, el aula de matemáticas como un escenario social y la enseñanza y el aprendizaje de la disciplina como procesos sociales (Gorgorió, Prat, & Santesteban, 2006).

La diversidad del estudiantado no es ajena a la clase de matemáticas. En ella confluyen varios tipos de diversidades: la de los protagonistas del hecho educativo manifestadas en constituciones de subjetividades diversos, las de los escenarios de exploración matemática, las de los sistemas de los instrumentos para la exploración y la reflexión matemática, los sistemas semióticos de representación –las lenguas, los sistemas de numeración, los sistemas simbólicos desarrollados para cada campo de conocimiento matemático–, las de los momentos de elaboración del conocimiento matemático y las de los dispositivos didácticos que dinamizan esos momentos (León et al., 2012). La anterior diversidad individual enriquece a la sociedad, y en el espacio educativo general, el encuentro de las poblaciones diversas ofrece un ambiente de enseñanza y aprendizaje matizado, donde los participantes del acto educativo comparten sus propósitos, intereses, capacidades y contextos.

Reconocer la diversidad en la clase de matemáticas permite aprovechar los distintos saberes que se encuentran en el aula, incorpora los contextos socioculturales a los procesos de enseñanza y aprendizaje y permite expandir los elementos de resolución de problemas para hallarle sentido a los aprendizajes que, posteriormente, se transfieren a la vida cotidiana (Martín, Dolz, & Mauri, 1997). El profesor es un diseñador, un arquitecto que va construyendo y solidificando su interacción con los grupos, facilitando aspectos disciplinares de las matemáticas y el respeto a las dinámicas que se van generando. De este modo, la idea de una matemática para todos implica metodologías transformadoras, acordes con los tiempos y, sobre todo, que incluyan a todas las voces (Giménez, Díez-Palomar, & Civil, 2007). En el año mundial de las matemáticas, se planteó la reflexión sobre cómo poner al alcance de todo el estudiantado las matemáticas necesarias para formar ciudadanos del

siglo XXI. Como una primera solución a este cuestionamiento, se propone una práctica de aprendizaje con tecnologías accesibles.

Moreno y Kaput (2005) señalan que los estudiantes pueden aprender más matemática y en mayor profundidad con el uso apropiado de la tecnología. Para los estudiantes que asisten a las clases de matemáticas e incorporan las tecnologías accesibles en la enseñanza y aprendizaje, las acciones dinamizadas permiten diferentes formas de comunicación y acceso al objeto de conocimiento. Se abren horizontes de información que enriquecen su discurso y, por ende, su aprendizaje. Les permiten interactuar desde sus capacidades si éstas son especializadas y lograr altos niveles de compenetración con el ambiente cuando son gestadas desde el contexto en el cual serán implementadas, en tanto que las tecnologías accesibles deben estar al servicio de la comunidad de aprendizaje³.

5.4.1 Hacia una didáctica de las matemáticas en un contexto de diversidad

La relación maestro-estudiante y la intención del primero de enseñar al segundo un conjunto específico de saberes constituyen las raíces de la didáctica. La didáctica general y la didáctica de las matemáticas se visualizan en la tradición griega y principalmente en las prácticas de los pitagóricos. Al respecto, Vasco, Martínez y Vasco (2008) reconocen que:

Ya los pitagóricos habían llamado “Mathesis”, “Mathémata”, o “ta Mathematica” a todos aquellos aforismos que sus novicios, los acústicos o acusmáticos debían aprender de memoria sobre la naturaleza, los astros, la música, los números y las figuras, a los que –sin saber muy bien el origen de la palabra– nosotros aludimos cuando hablamos de matemáticas. Los romanos los llamaron *pensum* (Vasco, Martínez, & Vasco, 2008, p. 121).

En este sentido, se destaca que la modernidad dirige la atención no sólo a los contenidos *pensum*, sino a las formas de enseñarlos. Emergen los métodos de enseñanza como los nuevos objetos que explicitan discursivamente el saber didáctico en constitución. Este mismo proceso es el que se lleva a cabo, también, por la génesis de las didácticas específicas: “para Comenio las ciencias, las artes y las lenguas deberían tener su propio método, que debería ser único en cada área” (Comenio, 1922, citado por León et al., 2012, p. 50). En el contexto alemán, se expone la diferencia entre una didáctica general y una didáctica de las materias escolares, entendida ésta bajo los conceptos de metodología (*Methodik*) y didáctica especial.

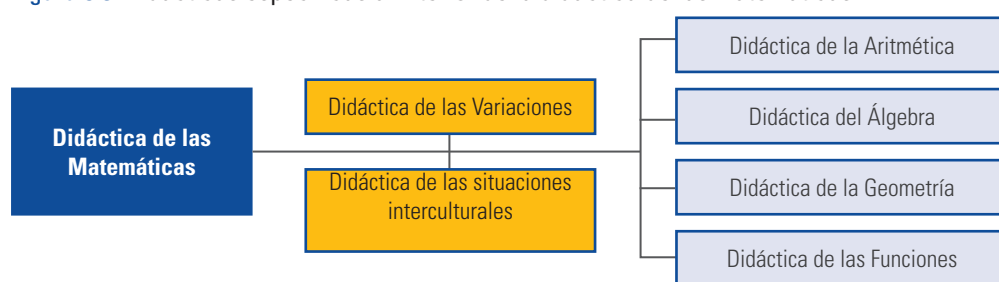
³ Comunidad de aprendizaje: Es un conjunto de actuaciones educativas de éxito dirigido a la transformación social y educativa.

En Bolívar (2005) se teoriza que el concepto de didáctica especial está implicando que la didáctica de las materias escolares debe desarrollarse en base a los fundamentos de la didáctica general. Una didáctica específica ya no se concibe como una mera aplicación de los principios de la didáctica general, sino como métodos específicos de formación de la materia y condiciones específicas de formación de esa materia que tiene por objeto, “investigar las diferentes estrategias de transformación de los contenidos de enseñanza en modos que pueden ser potentes didácticamente, según la materia que se trate y el estudiantado a que se dirija” (Bolívar, 2005, p. 16).

D’Amore (2006) señala una forma de expresión muy difundida para las didácticas específicas; es el elemento discursivo que se vincula a la reflexión sobre la didáctica general y las didácticas específicas o disciplinarias: “la matemática educativa, que estaría más vinculada a problemáticas relacionadas con la matemática misma entendida como instrumento para la educación” (D’Amore, 2006, p. 38). Actualmente el desarrollo de las didácticas específicas o disciplinarias contempla la didáctica de las matemáticas, de las ciencias, del lenguaje y del arte, entre otras. A su vez, cada una de las didácticas específicas tiene un subgrupo de didácticas que conforman un cuerpo de conocimiento con referentes epistemológicos propios, con marcos teóricos y metodológicos que soportan sus prácticas de investigación (León et al., 2012).

La figura 5.3, muestra las didácticas específicas en la didáctica de las matemáticas presentes en currículos de formación de profesores en universidades de América Latina y el Caribe:

Figura 5.3: Didácticas específicas al interior de la didáctica de las matemáticas



Fuente: León et al. (2012).

En la búsqueda por establecer una relación entre las didácticas específicas dentro del conocimiento, González y Díez (2004) sostienen que:

Cualidades y capacidades son dotaciones que se aprenden, luego se enseñan. No hay teorema matemático, principio de la naturaleza, relato histórico o vivencia estética y, sobre todo expresión lingüística que los

expresa, que no ofrezca la posibilidad de incrementar la potencia de imaginar, simbolizar, significar, experimentar, interpretar, establecer analogías, inferir, relacionar, valorar, explicar, generalizar, argumentar, etc., es decir, de conocer de educar (p. 7).

Para D'Amore (2006) el desarrollo actual permite considerar la didáctica de la matemática como una divulgación de ideas que fija la atención en la fase de enseñanza, la investigación empírica; y en el aprendizaje de las matemáticas. En este contexto, las caracterizaciones actuales de la didáctica de las matemáticas y de la educación matemática consideran:

- Didáctica de las matemáticas: es la disciplina científica y el campo de investigación cuyo objetivo es identificar, caracterizar y comprender los fenómenos y los procesos que condicionan la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.
- Educación matemática: es el sistema social, complejo y heterogéneo que incluye teoría, desarrollo y práctica relativa a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas incluyendo a la didáctica de las matemáticas como subsistema (D'Amore, 2006, p. 111).

De ahí que se pueda inferir que la didáctica específica es objeto de enseñanza y elemento de aprendizaje que involucra, según León et al. (2012):

- Conocimiento específico de los fundamentos y los métodos de los campos de conocimiento.
- Criterios de valoración, de progreso en el aprendizaje, de adecuaciones didácticas y de diseños didácticos asociados a propósitos de formación.
- Actitudes para el debate, la comunicación, la cooperación, la crítica y la participación, entre otros.
- Dominios de estrategias para adoptar, transformar y crear currículos y conocimientos escolares acordes a las necesidades y condiciones de los estudiantes.

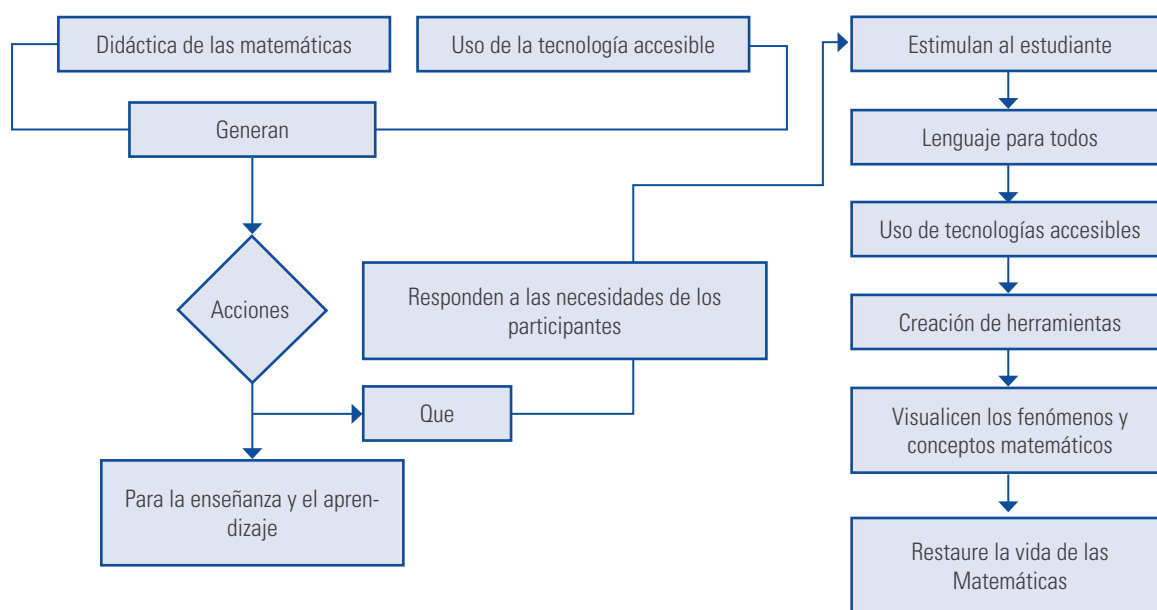
Un profesor miembro de una comunidad de aprendizaje debe comprender las estructuras de la materia enseñada, los principios de la organización conceptual y los principios de indagación que ayuden a responder a dos tipos de preguntas en cada ámbito: ¿cuáles son las ideas y las destrezas importantes en este dominio del saber?, y ¿de qué manera quienes generan conocimientos en esta área incorporan las nuevas ideas y descartan las superfluas o deficientes? (León et al., 2012). Esto es, ¿cuáles son las reglas y procedimientos de un buen saber académico y de la investigación? Los procesos de enseñanza y aprendizaje asociados con la comprensión de cada disciplina en particular llegan a ser foco de investigación (Bolívar, 2005).

5.4.2 Didáctica de las matemáticas y uso de tecnologías accesibles

La nueva tendencia entre las matemáticas como área, la didáctica de las matemáticas como una didáctica específica y la evolución del campo tecnológico como herramienta que apoya los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula⁴ favorece el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas en contexto de diversidad. En la actualidad, las tecnologías accesibles han dado un nuevo enfoque a la forma de desarrollar la interacción con el conocimiento en el aula, abriendo paso a la utilización de nuevas herramientas de apoyo a la docencia (León et al., 2012). Según la UNESCO (2004), las tecnologías accesibles generan que el énfasis de la profesión docente se transforme desde una perspectiva centrada en el profesor y basada en clases magistrales, hacia una formación centrada principalmente en el estudiante dentro de unos ambientes de aprendizaje interactivos.

Según León et al. (2012), la relación didáctica de las matemáticas y las tecnologías accesibles se vuelve una relación de inclusión en la medida que el desarrollo que actualmente tiene la didáctica de las matemáticas está influenciado por la incorporación de las tecnologías accesibles. En la figura 5.4, se presentan algunos ejemplos de herramientas o aportes relacionados con didáctica y que hacen uso de las tecnologías accesibles para la enseñanza de las matemáticas.

Figura 5.4: Relación entre didáctica con el uso de la tecnología



Fuente: León et al. (2012).

⁴ Aula: espacio físico o virtual donde interactúan profesores, estudiantes y la comprensión de los profesores y estudiantes como sujetos socioculturales.

Para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en un contexto de diversidad es importante el uso de las tecnologías accesibles. Sin embargo, en la actualidad, se están comercializando programas informáticos como didácticos que en realidad nada tiene que ver con lo que en realidad se debe enseñar o lo que los estudiantes deben aprender (Bachratá & Bachraty, 2011). En este sentido, se debe tener cuidado al obtener dichos programas, estudiarlos minuciosamente y determinar si son o no aptos para ser utilizados en las aulas. Especialmente, porque a menudo no son compatibles con la metodología de enseñanza idónea y a veces impiden, incluso, la enseñanza de las matemáticas. Surge entonces la necesidad de identificar enfoques en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que determinen la orientación que toma la didáctica de las matemáticas, así como la necesidad de promover y difundir, en los diferentes niveles, la inserción de las tecnologías accesibles en la educación matemática para el logro de aprendizajes significativos fomentando la necesidad de un cambio en las metodologías tradicionales de enseñanza. Ello permitirá divulgar la enseñanza personalizada en el proceso de aprendizaje e impulsar la creación de programas que faciliten la presentación del contenido de las más diversas formas. Se logrará atender, así, a las necesidades especiales en la medida en que se genera una didáctica que favorece su inserción.

Es importante señalar que matemáticas, didáctica general y didáctica de la matemática son tres campos de conocimiento necesarios para la adquisición del conocimiento matemático y, así mismo, para la formación de los profesores de matemática. Así lo destaca D'Amore (2006):

No es posible pensar que se puede enseñar matemática sin una sólida preparación previa en matemática, no es posible pensar que pueden desarrollarse cuestiones críticas de carácter epistemológico y didáctico sobre la matemática si no se está bien preparado en matemática (D'Amore, 2006, p. 389).

Siendo la matemática un elemento básico, ella no es suficiente, como no lo es la didáctica de la matemática, ni la didáctica general. Se necesita la concurrencia de las tres en la preparación de los estudiantes. En lo que concierne a la formación de un estudiante en un contexto de diversidad, los tres campos requieren desarrollarse en la comprensión de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas cuando los profesores aplican estrategias que difieren de las usadas por la mayoría de las poblaciones.

5.5 LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN Y PARA LA DIVERSIDAD

La formación del profesor se ha puesto de relieve en numerosos estudios. Dentro de esta formación, uno de los aspectos a los que se ha prestado atención es a la formación del profesor de matemáticas que desempeña su labor en las escuelas y en las universidades.

Durante mucho tiempo la gente de las universidades se preocupaba exclusivamente de sus ciencias sin conceder atención alguna a las necesidades de las escuelas, sin cuidarse en absoluto o de establecer conexión alguna con la matemática de la escuela. ¿cuál es el resultado de esta práctica? El joven estudiante de la universidad se encontraba a sí mismo, al principio, enfrentado con problemas que no le recordaban en absoluto las cosas que le habían ocupado en la escuela. Naturalmente olvidaba estas cosas rápida y totalmente. Cuando, después de acabar su carrera, se convertiría en profesor de enseñanza media se encontraba de repente en una situación en la que se suponía que debía enseñar las matemáticas elementales y tradicionales en el viejo modo pedante; y puesto que, sin ayuda, apenas era capaz de percibir conexión alguna entre su tarea y sus matemáticas universitarias, pronto recurría a la forma de enseñanza garantizada por el tiempo y sus estudios universitarios quedaban solamente como una memoria más o menos placentera que no tenía influencia sobre su enseñanza” (Gil & Guzmán, 2001, p. 56).

En la referencia de Gil y Guzmán (2001) se distinguen dos particularidades de la formación matemática del profesor: desconexión entre la matemática de la escuela y la de la universidad y regresión didáctica. A día de hoy, 2016, estas particularidades son asumidas por investigadores y formadores de profesores como aspectos prioritarios que orientan la formación de profesores.

Si se considera el imperativo de ofrecer una educación que acoja la diversidad –social, cultural, étnica, racial y biológica-, toma relevancia en la formación de los profesores el aspecto de la identidad de los maestros. En la actualidad el imaginario colectivo imperante en América Latina y el Caribe sobre el oficio de enseñar, cercano a ser meros ejecutores de tareas (un técnico), banalizó la profesionalidad del profesor y su identidad, situación que trajo como consecuencia que la práctica del profesor esté signada por la rutina y cada vez más alejada de la producción de innovaciones, conocimientos y transformaciones que respondan a las exigencias actuales de una educación para la diversidad.

Aprender a enseñar matemáticas es un proceso paulatino de incorporación en una comunidad de práctica, diferenciando dos tipos de prácticas íntimamente relacionadas, como son la relativa a las matemáticas y la relativa a la didáctica⁵. Dichas prácticas dependen del contexto cultural y social en el cual se participa. Las instituciones culturales proveen a las comunidades de aprendizaje los instrumentos físicos y conceptuales⁶ con los que realizan actividades propias de la práctica de enseñar, además de las formas de realizarlas, es decir, maneras de explorar, de comunicar y de ser. Así, el estudiante que se forma como profesor desarrolla una experiencia con un cierto tipo de conocimiento característico de su profesión: el conocimiento profesional del profesor de matemáticas. En qué consiste este conocimiento y la definición de sus componentes sigue siendo una de las preocupaciones de los investigadores en educación matemática. Cobra especial interés lo que Shulman (1986) denominó conocimiento de la materia de enseñar y que otros han llamado matemáticas para enseñar o conocimiento matemático para enseñar.

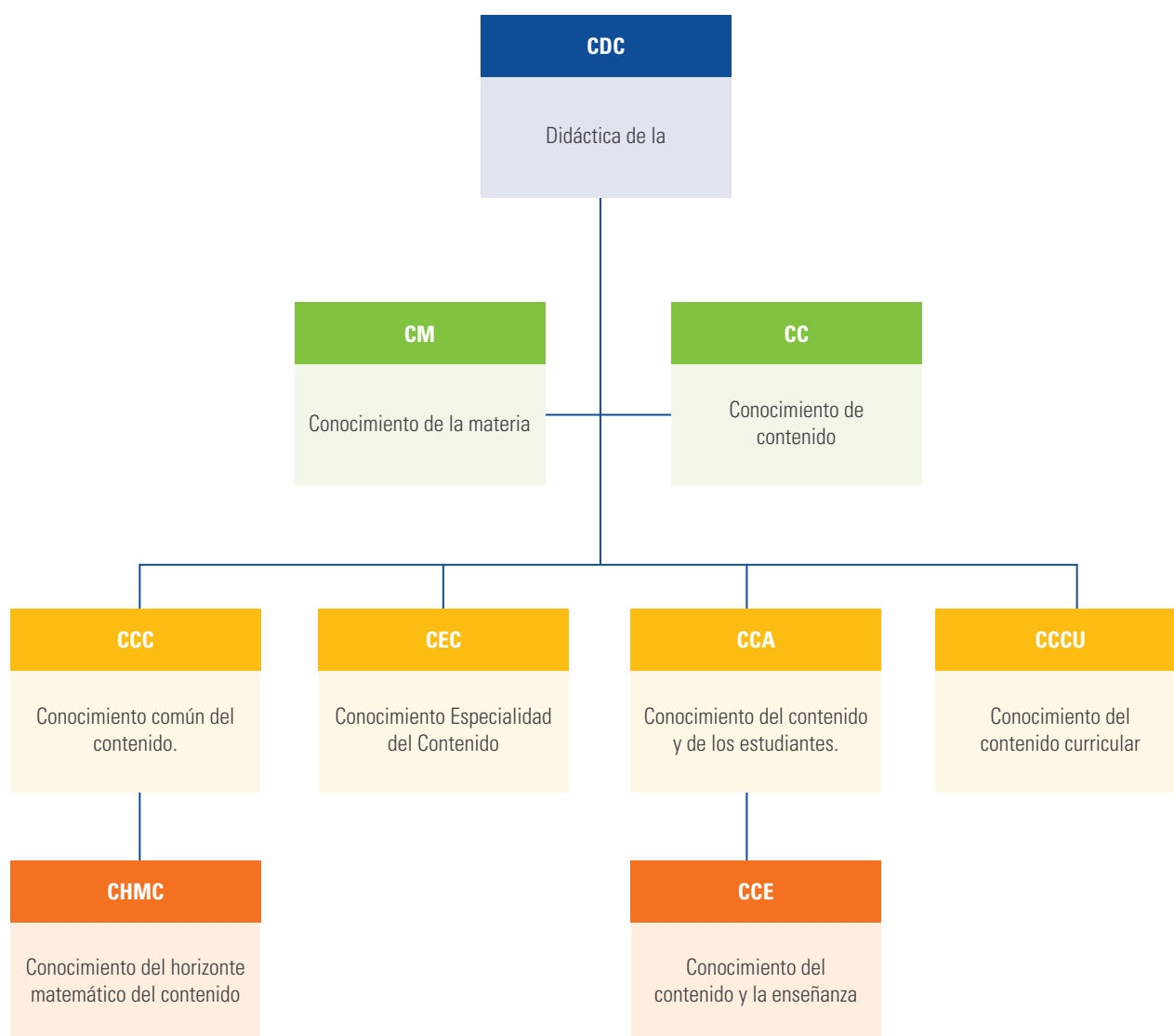
En Ball, Thames y Phelps (2008) se caracteriza el conocimiento del profesor de matemáticas como un conocimiento de carácter práctico profesional: conjuga el conocimiento de la materia (matemáticas) y el contenido pedagógico, y lo denominan conocimiento matemático para la enseñanza (CME), entendido éste como saber necesario para realizar la práctica de enseñar matemáticas.

Desde una formación matemática en la diversidad y para la diversidad es necesario contemplar, además, el conocimiento del entorno cultural del aula. Así, el conocimiento didáctico del profesor se considera en el sistema que presenta la figura 5.5, que ha tomado como punto de referencia el presentado por León et al. (2012).

⁵ Se entiende como práctica matemática y didáctica cualquier acción o manifestación (lingüística o de otra forma) llevada a cabo por alguien para resolver problemas relacionados con las tareas profesionales y articuladas de la práctica de enseñar matemáticas.

⁶ Se entiende por instrumentos físicos y conceptuales todas las cosificaciones provenientes de las comunidades de práctica de matemática, didáctica, pedagogía, así como los instrumentos tecnológicos dispuesto para la enseñanza.

Figura 5.5: Conocimiento didáctico-pedagógico del profesor



Fuente: León et al. (2012)

Según León et al. (2012) el sistema se articula en:

- Conocimiento común del contenido (CCC). Es el conocimiento matemático y habilidades utilizadas en contextos diferentes a la enseñanza.
- Conocimiento especializado del contenido (CEC). Es el conocimiento matemático y habilidades que son propias o únicas de la enseñanza.
- Conocimiento del horizonte matemático del contenido (CHCM). Es una conciencia de cómo los temas matemáticos están relacionados a lo largo del currículo de matemática.

- Conocimiento del contenido y de la enseñanza (CCE). Combina el conocimiento sobre la enseñanza y acerca de las matemáticas. Muchas de las tareas matemáticas en la enseñanza requieren un conocimiento matemático del diseño de la instrucción.
- Conocimiento del contenido curricular (CCCU). Está representado por la amplia gama de programas diseñados para la enseñanza de temas específicos y de tópicos matemáticos en un nivel dado, la variabilidad de materiales didácticos disponibles en relación con estos programas y el conjunto de características que sirven como indicadores y condiciones para el uso de esos materiales didácticos en los currículos particulares o en circunstancias particulares.
- Conocimiento didáctico de las culturas (CDC). Es el conocimiento del potencial didáctico que las culturas que confluyen y constituyen en el entorno social del aula ofrecen al proceso de enseñanza de las matemáticas. En este marco, el uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas es considerado como un aspecto que abordar dentro del conocimiento del contenido y la enseñanza. Su incorporación tiene que ver con la reflexión sobre las posibilidades de múltiples representaciones y medios de comunicación y la exploración matemática.

El estudiante que se forma como profesor de matemáticas pone en juego el denominado conocimiento profesional del profesor⁷. Así, los formadores de profesores, que son quienes diseñan, gestionan, y evalúan los ambientes de aprendizajes propuestos a los estudiantes para profesor, construyen hipótesis sobre las posibles trayectorias de aprendizaje que se constituyen en los referentes para los programas de formación, que se plasman en los currículos particulares de cada institución, a partir de las diversas experiencias pedagógicas, didácticas e interculturales en las que la León et al. (2012) proponen la constitución de la identidad del profesor. Concretamente, recupera la identidad del profesor como un profesional de la enseñanza al que hay que dotar de instrumentos para la práctica docente que le ayuden a diseñar, gestionar y proponer proyectos, así como evaluar, participar en actividades que lo hacen integrante de la comunidad de práctica y que le permitan identificarse con el oficio de enseñar como una profesión altamente compleja e importante para la construcción de mundos posibles cercanos a los ideales de igualdad, equidad y reconocimiento de la diversidad.

⁷ Conocimiento de y sobre las matemáticas. Conocimiento de contenido pedagógico. Conocimiento de y sobre el aprendizaje de las matemáticas. Conocimiento de y sobre los aspectos políticos, sociales y culturales de la profesión.

5.6 DINAMIZACIÓN DEL APRENDIZAJE EN CONTEXTO DE DIVERSIDAD: EXPERIENCIAS MATEMÁTICAS Y DIDÁCTICAS PARA LA INTERACCIÓN

Mientras que las diferentes sociedades y culturas propician variedad de experiencias y formas de ver el mundo, los currículos educativos de las matemáticas son muy similares en todo el planeta y contienen un elemento adicional común excluyente, no siempre reconocido explícitamente: “se han desarrollado para preparar a una minoría de estudiantes con los requisitos para la realización de estudios superiores en la universidad” (Bishop, 2005, p. 153). Pero si la realidad difiere mucho de ser homogénea y las necesidades de los pueblos latinoamericanos no coinciden con las de los países altamente industrializados, no es conveniente continuar con este tipo de currículos ya que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en un contexto de diversidad requiere currículos sensibles a las culturas (Bishop, 2005), en particular en sociedades pluriculturales como las de América Latina.

Aunque los países de América Latina, en la actualidad, han abrazado la diversidad, esto es todavía parte del discurso y aún no se ha visto reflejado en la práctica educativa, ni en la educación matemática y, aún menos, en las matemáticas entendidas como una materia neutral (León et al., 2012). Desde esta perspectiva, la educación matemática requiere corregir los desequilibrios entre los valores que subyacen en las matemáticas tal y como se enseñaban a finales del siglo XX, y propone un currículo matemático con un enfoque cultural organizado a partir de lo que se denomina actividades universales: contar, medir, localizar, diseñar, explicar y jugar (Bishop, 1999). Estas actividades dan lugar a conceptos matemáticos como la cantidad, la forma o la magnitud, y a capacidades tales como explorar, cuestionar, comunicar y argumentar.

Por una parte, los conceptos matemáticos como cantidad, forma y magnitud se encuentran relacionados con los entornos geográficos, los sistemas de organización social y económicos en los que éstos han emergido (Lappan, Fey, Fitzgerald & Firel, 2008) y, en particular, con los sistemas de organización del tiempo y de las actividades grupales (Bishop, 2005). Por otra parte, en todas las culturas se identifican procesos para contar, comparar, calcular, estimar, medir, construir o temporalizar (Bishop, 1999), los cuales constituyen el ambiente propicio para el desarrollo de estructuras matemáticas (de números, de formas, de razones, de funciones y de datos, con sus operaciones, sus algoritmos y sus relaciones) que, a su vez, desarrollan macro-estructuras como la aritmética, la geometría, la estadística y el análisis (Mac Lane, 1986). El ambiente cultural de cada grupo social determina tanto los niveles de desarrollo en las estructuras matemáticas vinculadas a cantidad, forma y magnitud, como el tipo de matemática escolar que en ello se desarrolla (León et al., 2012).

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en un contexto de diversidad requiere formar estudiantes capaces de realizar una práctica que posibilite experiencias escolares tendentes a estructurar relaciones entre la matemática, las culturas y los grupos sociales. Los estudiantes requieren vivir y enfrentar experiencias significativas con la cantidad, la forma y la magnitud, al mismo tiempo que se les permita recrear la matemática escolar, así como también recrearse a sí mismos como sujetos profesores de matemáticas y a la propia profesión docente (D'Amore, 2006). Ahora bien, los cambios en cuanto a las demandas de los futuros profesionales de la enseñanza imponen, a su vez, cambios en la manera de plantear el currículum y los diseños didácticos. En este sentido, en León et al. (2012) se proponen acciones para atender la diversidad en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es decir, reconocer e incorporar en los procesos de formación los componentes siguientes: intencionalidad, valoración y detección o creación de experiencias matemáticas.

Figura 5.6: Componentes para la incorporación en el aprendizaje de las matemáticas



Fuente: León et al. (2012).

La intencionalidad se refiere al reconocimiento del valor de lo matemático en la experiencia escolar y en la conformación de identidades con sentido matemático para interactuar en y con el mundo (León et al., 2012). Para ello es preciso adoptar y desarrollar un punto de vista matemático en la exploración de situaciones y en la resolución de problemas planteados por diversos contextos. El valor de lo matemático en la experiencia escolar consiste en ver las matemáticas como una red consistente elaborada de conexiones que se pueden establecer entre actividades humanas y entre fenómenos: multitud (lo que puede ser contado), extensión (lo que puede ser medido), entre campos de conocimiento-geometría-arquitectura, cálculo-economía-, entre campos de las matemáticas -análisis, geometría, álgebra- (Mac Lane, 1986). Estos componentes de las redes que generan las ramas se expresan en términos de principios básicos de toda conceptualización: el elemento, el conjunto, la propiedad, la relación y la operación (León, 2005).

El valor de lo matemático y de sus estructuras se vincula de manera inmediata al valor de conocer y explorar relaciones en el mundo. El conocimiento consiste, en gran medida, en establecer relaciones y en organizarlas en sistemas. Hay relaciones entre objetos en el espacio, entre cantidades físicas, entre fenómenos biológicos, sociales y psicológicos.

Algunas herramientas útiles para alcanzar el reconocimiento del valor de lo matemático y del conocimiento a partir de experiencias matemáticas han sido propuestas y desarrolladas en América Latina. Por ejemplo, a partir de una caracterización de la cultura desde criterios de participación, compatibilidad y subordinación a sistemas de valores acordados, D'Ambrosio (2008) afirma:

Al reconocer que los individuos de una nación, de un grupo, comparten sus conocimientos, tales como el lenguaje, los sistemas de explicaciones, los mitos y cultos, la gastronomía y las costumbres, y también sus comportamientos, compatibilizados y subordinados a los sistemas de valores acordados por el grupo, decimos que esos individuos pertenecen a una cultura. (D'Ambrosio, 2008, p.19).

La investigación y los resultados de experiencias educativas en contextos multiculturales señalan factores que permiten crear y recrear significados matemáticos relacionados con los objetos matemáticos que se construyen desde tales experiencias. Entre tales experiencias, cabe mencionar, por ejemplo, la identificación cultural por parte de maestros, estudiantes y familia, la aplicación de un modelo pedagógico integral en la formación de los profesores y estudiantes que estimule a aprender de la familia, la cultura y la lengua de los estudiantes, y la participación de la comunidad en los procesos educativos (Tinooco, 2011). Esto contribuirá a conformar y tematizar la base de lo que constituye la cultura matemática de la sociedad.

La valoración se refiere al segundo componente esencial en el aprendizaje de las matemáticas en y para la diversidad. Consiste en aquellos que otorgan consideración y reconocimiento a los protagonistas de las experiencias escolares que, como menciona Tinooco (2011), no son sólo los profesores y los estudiantes, sino también otros personajes de las sociedades y sus culturas: familias, funcionarios escolares e, incluso, otros personajes de la comunidad. Además, la importancia de valorar la lengua de las diversas poblaciones es un elemento transcendental que debe ser considerado en los procesos de aprendizaje, particularmente en los basados en la diversidad étnica y cultural de los estudiantes. Por otra parte, debe tomarse en cuenta que, para la aprehensión y el desarrollo de las matemáticas, el lenguaje es un elemento esencial. Así, León et al. (2012) considera que:

Las numeraciones orales de las lenguas indígenas, los modos de referirse a los diferentes objetos –algunas lenguas distinguen este tipo de adjetivos de acuerdo con las características de los objetos a medir, diferenciando, por ejemplo, lo animado de lo inanimado- y otros muchos casos en que las lenguas indígenas y otras lenguas naturales, expresan relaciones cuantitativas de manera diferente al español (León et al., 2012, p. 135).

Tinoco (2011) dice que, para autores como Freire, el enseñar y el aprender también giran alrededor de la producción del lenguaje, que también es conocimiento. Concluye que:

En dicho sentido, podríamos decir que hay que integrar el capital lingüístico, además del cultural, social y económico de los estudiantes en la construcción del quehacer de la universidad y particularmente en el diseño del currículo y en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Tinoco, 2011, p. 92).

La detección o recreación de experiencias matemáticas y didácticas hacen referencia a las experiencias que surgen tanto en las situaciones escolares, como también a aquellas que surgen de las condiciones o circunstancia de la cultura matemáticas. Historia, cultura y realidad actual se constituyen en fuentes para recrear experiencias didácticas (León et al., 2012). Un ejemplo de una fuente histórica, que puede ser incorporada en un diseño didáctico para estudiantes, es el que se retoma de Boyer (1992): En el registro de la aritmética babilónica ubicada en el periodo 1900 a 1600 a C., denominada “Tablilla Plimpton 322”, se presenta una evidencia de exploraciones entre longitudes de lados de un triángulo:

Tabla 5.3: Ejemplo de tablillas de Plimpton

1, 59, 0, 15	1, 59	2, 49	1
1, 56, 56, 58, 14, 50, 6, 15	56, 7	1, 20, 25	2
1, 55, 7, 41, 15, 33, 45	1, 16, 41	1, 50, 49	3
1, 23, 13, 46, 40	56	1, 46	15

Fuente: León et al. (2012)

Las diversas exploraciones que realicen los estudiantes estarán determinadas no solo por la instrucción del diseño didáctico, sino por el tipo de registro semiótico que el profesor use en la presentación de la tablilla. En este caso, la tabla es presentada en un sistema de numeración sexagesimal (el original de la tablilla Plimpton 322), pero el profesor pudo presentarla en otro sistema según la intencionalidad del diseño. Sin embargo, la exploración de las relaciones numéricas presentes en la tabla estará vinculada a una presencia de la relación pitagórica. Una de las interpretaciones de las relaciones numéricas verificada en la fila 1, de la tabla 5.3 es:

- La selección de dos enteros sexagesimales regulares p y q , con $p > q$. Para el caso de la primera fila de números, los valores correspondientes a p y q son 12 y 5.
- La conformación de una terna de números a , b y c tales que $a^2 + b^2 = c^2$, con $a=p^2 - q^2$, $b=2pq$ y $c=p^2+q^2$.

- Continuando con los valores de $p=12$ y $q=5$, tenemos que $a=12^2 - 5^2$, entonces $a=119$ que expresado en el sistema sexagesimal 1.59, puesto que: $119=1 \cdot 60 + 59$, que corresponde al primer número de la segunda columna de izquierda a derecha. $c=12^2 + 5^2$, $c=169$ que expresado en el sistema sexagesimal es 2.49, puesto que: $169=2 \cdot 60 + 49$, que corresponde al primer número de la tercera columna de izquierda a derecha. La razón de c a b es $1,40833\dots$ elevado al cuadrado es $1,9834027\dots$ expresado en el sistema sexagesimal es $1;59,0,15$, puesto que $1 \cdot 60^0 + 59 \cdot 60^{-1} + 0 \cdot 60^{-2} + 15 \cdot 60^{-3}$, que corresponde al primer número de la columna de la izquierda.

Por otra parte, la expresión artística de las culturas es una fuente para la reflexión sobre la forma y sus condiciones de construcción. La esculturas, pinturas y cerámicas sirven de marco para que Villaveces (2008) declare que muchas formas de arte en diversas culturas comienzan por un reconocimiento de la simetría como la reflexión, sea de rotación o de traslación, y afirma:

Hermosas estructuras matemáticas relacionadas con la Teoría de Grupos se han desarrollado para hacer análisis formales de las múltiples simetrías, y el profesional debería tener competencias más allá de las del sentido común y avanzar en alguna medida hacia la comprensión más elaborada de la simetría. No sólo para apreciar el arte, también para entender la vida (Villaveces, 2008, p. 12).

Esta reflexión lleva a plantear que la detección o recreación de experiencias matemáticas y didácticas conduce a asignar el mismo valor, tanto a enfoques teóricos de la enseñanza, del aprendizaje, de la educación matemática, como a las relaciones de cooperación, comunicación y negociación de significados entre personas de diferentes condiciones (León et al., 2012). Esta forma de mirar el hecho educativo muestra que la vida cotidiana de las comunidades, los grupos, las familias, las tribus, los gremios, los profesionales y las naciones está en diferentes regiones, en ritmos y maneras distintas y es resultado de la elección de ciertas prioridades, de los factores ambientales, de los modelos de urbanización y de producción, de los sistemas de comunicación y de las estructuras de poder.

Por tanto, un currículo globalizado o fijo no se puede sostener en estas condiciones, se requiere de propuestas curriculares que, mediante herramientas didáctica, reconozcan, como plantea Villaveces (2008), la matemática inmersa en las culturas y su consideración como un aspecto en la formación de profesionales y, en particular, de profesores de matemáticas:

Podrían citarse muchos otros ejemplos, pero no sería pertinente, pues no se trata de presentarlos, sino de ilustrar la idea general de que las matemáticas, además de la enorme fuerza como saber instrumental que tienen, forman parte de nuestra cultura racional y la competencia básica esencial es esa asimilación de la cultura (Villaveces, 2008, p. 13).

5.7 EXPERIENCIAS MATEMÁTICAS Y DIDÁCTICAS ENTRE DIVERSOS: ENRIQUECEN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN Y PARA LA DIVERSIDAD

Reconocer que los entornos sociales y culturales son de vital importancia para el desarrollo del pensamiento matemático supone poner un especial acento en las relaciones y mediaciones instrumentales y semióticas que establecen los sujetos con ellos mismos y con el entorno (León et al., 2012). Según D'Ambrosio (2008), se puede encontrar matemáticas no sólo en el aula y en los textos, sino también en la vida cotidiana. ¿Cuáles son los conocimientos etnomatemáticos que provienen de ancestros indígenas y que han heredado las nuevas generaciones? ¿Cuáles son los modos de matematización en las principales actividades económicas, sociales y culturales de comunidades indígenas, afrodescendientes y mestizos de la Costa Caribe Nicaragüense? ¿en qué consisten los saberes etnomatemáticos sobre el sistema numérico, el sistema de medición o la geometría empleada por las comunidades indígenas, afrodescendientes y mestizos de la Costa Caribe Nicaragüense? Las respuestas precisas y pertinentes a los interrogantes anteriores fundamentarán la valoración de la identidad y conocimientos de nuestras culturas mediante el uso de prácticas comunitarias que se han transmitido de generación en generación, los conceptos matemáticos pasados y su relación con los procedimientos, estrategias y métodos utilizados en la construcción del conocimiento matemático actual.

Por ejemplo, en el caso de las comunidades étnicas de la costa caribe nicaragüense es necesario poder identificar, describir y hacer un análisis de las diferentes formas de hacer matemáticas de las poblaciones indígenas o de los pueblos afrodescendientes y sus relaciones con las comunidades mestizas. También resulta ineludible explorar las formas o modos de matematización que realizan para resolver problemas cotidianos, a fin de crear una propuesta acorde a la realidad de los estudiantes y profesores de estas comunidades. No debe olvidarse que las culturas prehispánicas llegaron a alcanzar niveles de conocimientos matemáticos mucho más allá del conteo simple, como se manifiesta, particularmente, en la construcción de sus calendarios que estructuran las actividades agrícolas de siembras y cosechas, discriminan las temporadas de lluvias, o en la génesis de instrumentos que

predicen y configuran entidades de sus cosmogonías que les permiten elaborar sentidos y relaciones de las comunidades con sus cosmos (León et al., 2012).

En Nicaragua la lengua materna de la mayoría de los estudiantes en aulas de clases con diversidad étnica no es el español. Castrillo y Torres (2010) afirman que enseñar en Misquito⁸ los contenidos matemáticos es difícil, especialmente el vocabulario técnico matemático, puesto que no hay expresiones equivalentes que se conozcan en la lengua materna. Enseñar los números naturales del 1 al 100 puede convertirse en una ardua tarea para la mayoría de los profesores, dado que no conocen todos los números en la lengua materna de sus estudiantes en nivel de educación primaria. Si se relaciona con el contexto universitario, tal afirmación tiene mucho sentido. La matrícula de estudiantes en el Recinto Universitario de URACCAN⁹-Bilwi para el año 2010, según el informe de registro, reporta que el 68% de los estudiantes matriculados de grado, técnico superior y escuela de liderazgo son estudiantes Miskitus.

Otro aspecto relevante en la formación de profesores para poblaciones indígenas es lo que los estudiantes indígenas de Nicaragua denominan confianza en la práctica docente. Podría considerarse esta confianza como lo ideal para el contexto multicultural, práctica que alude a la relación en el aula de clases con el docente, mediado por lo que se podría llamar el repertorio bilingüe -español-miskitu, miskitu-español- o trilingüe -español-creol-miskitu, creol-miskitu-español- y enfocado en la práctica del profesorado. Esto obliga a dotar diseños de momentos afectivos de negociación de significados vinculados, de manera explícita, a procesos afectivos de identificación de procesos matemáticos y didácticos, en función de los cuales la participación sistemática permita realizaciones personales y grupales que generen confianza acerca de sí mismo y dé las posibilidades de expresión y dominio de la práctica conforme a la de las comunidades de práctica de profesores de matemáticas.

Al proponer actividades como:

¿Cuál de estos estudiantes está utilizando un método que se puede usar para multiplicar cualquier par de números enteros?

⁸ Misquito: es una lengua materna hablada por el pueblo indígena Misquito en el Norte de Nicaragua, particularmente en la Región Autónoma del Caribe Norte.

⁹ URACCAN: Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense.

Tabla 5.4: Ejemplo del conocimiento especializado del contenido

Estudiante A	Estudiante B	Estudiante C
$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ + 75 \\ \hline 875 \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline 175 \\ + 700 \\ \hline 875 \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline 25 \\ 150 \\ + 600 \\ \hline 875 \end{array}$

Fuente: Ball, Thames y Phelps (2008).

El estudiante tiene condiciones para expresar en sus análisis sus concepciones tanto con respecto al objeto matemático en consideración (un algoritmo), como a su proceso de aprendizaje acumulado en relación a este saber.

Otro ejemplo del conocimiento del contenido y de los estudiantes se refiere a la capacidad de reconocer los errores y abordar los problemas que éstos generan. Cabe observar los dos casos siguientes:

Tabla 5.5: Ejemplo del conocimiento del contenido y de los estudiantes

A	B
$\begin{array}{r} 3.5 \\ \times 2.5 \\ \hline 255 \\ + 80 \\ \hline 10.55 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3.5 \\ \times 2.5 \\ \hline 62.5 \end{array}$

Figura: Ball, Thames y Phelps (2008).

El reto para el aprendizaje de las matemáticas en y para la diversidad es enorme y las variables que hay que tener en cuenta son innumerables. Lograr recuperar los saberes de las comunidades y tener conocimientos de las distintas capacidades de las poblaciones, y en condiciones de vulnerabilidad, es fundamental para dar sentido al aprendizaje de las matemáticas, y no es una tarea sencilla. El aprendizaje de las matemáticas en esta circunstancia puede fomentar la intencionalidad y la valoración, también puede ofrecer experiencias matemáticas significativas, pero esto no basta. Mucho menos, aún, si la práctica ha de realizarse en solitario. Saber cómo utilizar este conocimiento para que sea retomado en el aula, con el fin de crear conocimiento matemático con sentido, puede sólo prevenir de la experiencia y sensibilidad propias. Hacerlas efectivas, por el contrario, requiere que éstas sean compartidas en comunidades conformadas para todos los formadores de maestros y

maestras, que sienten y saben que una educación con sentido para todo es posible. Operar sobre esta necesidad puede iluminar el camino.

5.8 EL DISEÑO, GESTIÓN Y EVALUACIÓN PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN Y PARA LA DIVERSIDAD

En León et al. (2012) se considera como núcleo de reflexión la experiencia del profesor con objetos que corresponden a la didáctica de la didáctica de las matemáticas, es decir, sus objetos de reflexión están en el nivel de una práctica que asume las condiciones de diversidad, para formar estudiantes competentes con acciones didácticas y así aprender matemáticas en un contexto de diversidad. En lo que concierne a poblaciones en situación de diversidad, la didáctica de la didáctica de las matemáticas se encuentra en etapa inicial de desarrollo. En la didáctica de la didáctica de las matemáticas, por muchos años, se ha considerado que todos los estudiantes a los que se dirigen los diseños didácticos pueden visualizar por efecto de sus percepciones visuales o pueden expresar, por efecto de sus condiciones auditivas y fonológicas (Gutiérrez & Boero, 2006).

Muchos de los conocimientos matemáticos están expresados para ser vistos y para ser comunicados en una lengua oral y escrita. Sin embargo, la didáctica de las matemáticas, a diferencia de las teorías matemáticas, tiene a un sujeto como protagonista de sus procesos y algunos de ellos no se percibirán por un medio visual o no se comunicarán a través de una interacción oral, o no dispondrán de una lengua no natural para ellos, o no expresarán lo que piensan por emociones que la segregación y otras formas de violencia han dejado en ellos.

La práctica escolar podría intentar reconocer que no puede homogenizar a sus estudiantes y que es necesaria la consideración de la diversidad como condición humana (León et al., 2012). Se trata de educar para la libertad a través de la libertad, formar espíritus libres, con imaginación, con fuerza, solidarios con plena conciencia de sí mismos, que den y sepan recibir ayuda, cooperativos, integrados con la naturalidad y la necesidad de una coparticipación y de una corresponsabilidad auténticas (Massone, Simón, & Druetta, 2003).

Enfocar el aula desde otra perspectiva es reconocer que, en las fases de realización de la acción del profesor de matemáticas, pre-activa o de planeación, interactiva o de desarrollo y post-activa o de evaluación y revisión reflexionada, se requiere introducir la problemática de la promoción de interacción entre diversos como un elemento dinamizador de la práctica de enseñar y aprender la didáctica de las matemáticas. Construir propuestas para la acción didáctica de profesores es un primer paso en el largo camino que tendrá que recorrer la

didáctica de las matemáticas para remediar la marginación a la que han sido sometidas las poblaciones en situaciones diversas y, así, formar a profesores comprometidos con realizar las premisas expuesta en León et al. (2014):

- **Fase pre-activa:** diseños aplicables a múltiples ambientes a través de la reflexión didáctica continua sobre la selección de múltiples formas para la expresión; la selección de múltiples herramientas para la explotación de los objetos de la dialéctica de la matemática; la selección de múltiples formas para la interacción sobre los objetos didácticos de los estudiantes; la selección de un conjunto coordinado de actividades y dispositivos didácticos que permiten la coexistencia de los tres tipos de razonamiento fundamentales en la experiencia matemática: la abducción y la deducción; la organización de formas de articular elementos para configurar dispositivos que instalan ambientes de aprendizaje que desarrollen experiencias matemáticas entre poblaciones diversas de estudiantes.
- **Fase activa:** Gestión de los ambientes didácticos para la mejora de competencias relacionadas con las experiencias matemáticas que desarrollan una forma matemática de ver el mundo en los aprendices escolares; procesos matemáticos que constituyen habilidades en los aprendices escolares para la exploración matemática de las situaciones; procesos sociales, culturales y lingüísticos que desarrollan formas de ser y de aprender sobre el mundo desde una perspectiva matemática; uso de las tecnologías para explorar de una manera matemática las situaciones y para expresar lo que reflexiona en las exploraciones.
- **Fase post-activa:** evaluación de los currículos y actividades diseñadas, de la gestión dentro y fuera del aula, con estudiantes, con padres de familia y con autoridades, así como de otros procesos presentes en el acto educativo con la idea de planificar futuras intervenciones, modificar diseños aplicados y la forma de gestionar algunas situaciones. Desarrollo de conocimiento didáctico sobre la matemática escolar y las experiencias que la desarrollan; la matemática escolar y el desarrollo de experiencias matemáticas con todos y para todas las poblaciones en contexto de diversidad; la matemática escolar y las tecnologías que permiten las experiencias matemáticas de las poblaciones diversas; las condiciones de las poblaciones y sus potenciales para el desarrollo matemático; el potencial de la interacción en la constitución de la identidad.

Se requiere concebir y realizar una didáctica de la didáctica de las matemáticas para la diversidad en la que intervengan aspectos cognitivos, éticos, sociales, culturales, afectivos y políticos con el propósito de responder a preguntas como las siguientes: ¿Qué perdemos cuando en clase no interactuamos entre diversos? ¿Qué se pierden un indígena, un afrodescendiente y un mestizo cuando la clase no les permite interactuar, especialmente para aprender matemática? ¿Qué instrumentos son adecuados para hacer posibles las interacciones entre poblaciones en contextos de diversidad? ¿Qué herramienta permite que interactúen un indígena, un afrodescendientes y un mestizo para tramitar una acti-

vidad matemática basada en la objetivación de una forma geométrica como la espiral de Arquímedes?

Otro aspecto que considerar en una didáctica de la didáctica de las matemáticas es que, actualmente, todas las teorías del aprendizaje reconocen la imposibilidad de separar la actividad cognitiva de la actividad representacional y de la mediación instrumental al aceptar que los instrumentos con los cuales se realiza la actividad condicionan las formas como los estudiantes se apropian, construyen o resignifican dicha actividad (León et al., 2014). Esta relación fue expresada por Wertsch (1993) con el nombre de principio de mediación instrumental: todo acto cognitivo está mediado por instrumentos que pueden ser materiales o simbólicos. En matemáticas, dicha mediación se da, especialmente, a través de los sistemas semióticos de representación.

5.9 LOS DISEÑOS DIDÁCTICOS EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN Y PARA LA DIVERSIDAD

En el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, los diseños didácticos suponen proponer un conjunto de actividades y de tareas que orientan las experiencias en las que participan los estudiantes, teniendo como referentes generales la diversidad y la incorporación de tecnologías accesibles. Así, se debe seleccionar, organizar y planificar las experiencias de aprendizaje necesarias para que una persona aprenda y, en particular, para que un estudiante en un contexto de diversidad adquiera el conocimiento matemático. Por lo anterior, participar de la tarea del diseño forma parte de la identidad que caracteriza la práctica de la enseñanza por parte del profesor, toda vez que se requiere que reflexione antes, durante y después de su acción (León et al., 2013; Calderón et al., 2013; García et al., 2013). La investigación basada en el diseño que se desarrolla en, sobre y dentro del mismo ha puesto de manifiesto que, para proponer ambientes de aprendizaje, se requiere construir, experimentar, evaluar y rediseñar hipótesis de trayectorias de aprendizaje.

La realización de diseños didácticos es un elemento que configura la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en un contexto de diversidad. Estos objetos y relaciones que constituyen el tejido didáctico que forma las macro estructuras didácticas, se dieron a conocer en León et al. (2013), Calderón et al. (2013) y García et al. (2013):

Figura 5.7: Tejido didáctico que forman las macro estructuras didácticas



Fuente: León et al. (2013), Calderón et al. (2013) y García et al. (2013).

- **La situación didáctica:** está estructuralmente considerada como un sistema regulado de corta duración durante el cual se produce un aprendizaje o comprensión. Discursivamente la situación didáctica se configura como una situación de comunicación.
- **La unidad didáctica:** es el sistema más amplio que interrelaciona los actores y los elementos centrales del proceso de enseñanza-aprendizaje: propósitos, contenidos, evaluación e interacciones, con una alta coherencia metodológica interna. Se emplea como instrumento de programación y orientación de la práctica docente y se sitúa en el marco del desarrollo del plan de área para un ciclo escolar.
- **La secuencia didáctica:** es la estructura curricular de una secuencia temporal de unidades didácticas, emerge de la orientación dada por unos objetivos de un programa o de una asignatura y de la necesidad de desarrollar un aprendizaje sobre contenidos en un marco de acción curricular. Es una superestructura de un dominio disciplinar diseñada curricularmente que se mueve en tres niveles: la situación planeada, la situación realizada y la situación reconstruida.
- **Los dispositivos didácticos:** se refieren al componente de la propuesta didáctica que propicia las condiciones para la emergencia de un tipo de acción en estudiantes y en profesores y que, a la vez, favorece la manifestación y el desarrollo de procesos de aprendizaje. Gracias a este proceso de diseño, adquiere su carácter de dispositivo didáctico. Muestra de ello son, entre otros, el juego, la resolución de problemas, el proyecto de aula o los talleres.
- **El ambiente didáctico:** es el sistema didáctico configurado por el profesor y el que, a su vez, configura las relaciones, los escenarios y los instrumentos que intervienen para consolidar un ambiente de aprendizaje. Como ambiente, desde un punto de vista ecológico, articula relaciones bio-socioculturales, como didáctico, ancla en ese ambiente la organización de los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Estos procesos se dan entre distintas poblaciones, en actos comunicativos, con las condiciones de existencia que los caracteriza para que el trabajo de matemáticas, en cualquier nivel educativo, requiera integrar los procesos de interacción, diálogo y negociación en torno a los contenidos matemáticos y su gestión (Gorgorió & Planas, 2004).

Por otra parte, existen tres principios del acto comunicativo que son determinantes en el accionar del aprendizaje en un contexto de diversidad. Éstos la interacción y la construcción compartida de saberes. Se trata de la credibilidad en el acto comunicativo, de la intención comunicativa y de la valoración del contenido de la comunicación:

Tabla 5.6: Principios que privilegian la interacción y la construcción compartida de saberes

El principio de credibilidad en el acto comunicativo	Este principio tiene dos componentes. El primero es el que surge del sujeto con la intención de comunicar y que parte de su interacción con lo matemático, que lo provee de herramientas teóricas y prácticas que le permiten configurar un propósito a comunicar real y comprobable. El segundo componente es el que se da en los emisores, los cuales validan el discurso para aceptar, refutar y negociar.
El principio de intención comunicativa	Aquí el estudiante tiene un propósito que comunicar que parte de la interpretación e interacción individual con lo matemático y que produce un enunciado que deberá estar ajustado al contexto en el que se está dando el acto comunicativo.
El principio de valoración de la comunicación	Aquí el impacto a la comunidad con la que se está interactuando es el eje primordial. Se comunica esperando que haya reacciones y consecuencias que modifiquen el contexto

Fuente: León et al. (2014).

En el aprendizaje en un contexto de diversidad se reconoce que los tres principios aludidos guían el acto comunicativo que, a su vez, constituye el proceso de negociabilidad de lo matemático. Lo matemático aporta tanto la materia de lo que se comunica, como los instrumentos de comunicación y acción. Igualmente, lo matemático regula y pone principios de actuación y comunicación, interviniendo radicalmente en el acto comunicativo. Así pues, el aprendizaje de las matemáticas en un contexto de diversidad se configura como un proceso de negociabilidad de lo matemático en una comunidad de práctica en la que los aspectos siguientes se manifiestan y se tematizan:

- La interculturalidad: es un proceso de relaciones horizontales donde prevalece el diálogo a través del cual se propicia el conocimiento mutuo, la comprensión, el respeto, el intercambio y la solidaridad entre los pueblos y las culturas.
- Perspectiva intercultural de género: reconoce y supera las relaciones desiguales entre hombres y mujeres; indígenas, afro-descendientes y mestizos, para lograr construir nuevas relaciones desde sus propias perspectivas, basadas en la justicia y equidad, y avanzar hacia el mejoramiento social, económico, político y ambiental en el que su participación responsable y efectiva en el ejercicio de sus derechos y deberes, en la toma de decisiones sobre políticas públicas, fortalece la autonomía regional y, por ende, el ejercicio efectivo de la ciudadanía intercultural.
- Autonomía regional: respeto y promoción de un sistema de administración, autogobierno y autodeterminación, a nivel comunal, territorial, municipal y regional, que conlleva el buen vivir de los pueblos culturalmente diferenciados en unidad dentro de la diversidad.
- Buen vivir y desarrollo con identidad: comprende el desarrollo de los procesos necesarios para lograr la complementariedad, armonía y equilibrio entre la Madre Tierra y las sociedades multiculturales.

- Diálogo de saberes: acciones que llevan a crear, recrear, compartir, diseminar e intercambiar conocimiento, saberes y prácticas desde la interacción entre el conocimiento propio fundamentado en la espiritualidad y el conocimiento occidental.
- En esta dirección, el modelo pedagógico de URACCAN (2008) se articula a partir de los fundamentos teóricos que ofrecen las pedagogías iluminadas por el enfoque histórico cultural. Se considera valioso orientar la formación hacia aspectos educativos tales como:
- Formación multidimensional: consiste en la consideración de los sujetos como una unidad múltiple que integra lo biopsicosocial, la individualidad y la historia, en relación íntima con el carácter, temperamento, corporeidad física y desarrollo corporal.
- Una visión dialéctica de sociedad: ésta se logra a través de una educación que promueve la transformación de la sociedad, desde las bases estructurales y súper estructurales.
- Capacidad para comprender y afianzar la articulación entre la educación y la esfera macro social.
- Responsabilidad con el medio social, compromiso y solidaridad con las particularidades del contexto en que se desarrolla el aprendizaje.

El aprendizaje de las matemáticas en un contexto de diversidad se debe reconocer y asumir que los pueblos indígenas son portadores milenarios de conocimientos y saberes, que sus culturas enriquecen la cultura global de Latinoamérica. Son de gran valía los valores éticos, humanos y espirituales que los pueblos indígenas transmiten. La cultura y la relación que los pueblos indígenas asumen con el ambiente –su cosmovisión y cosmogonía– son fuentes inagotables y constituyen una energía revitalizadora y sustentable de saberes y de conocimientos, que pueden ser fuentes científicas en el ámbito teórico y práctico para el auto-desarrollo en el marco de una nueva relación horizontal con el mundo no-indígena. En este sentido, URACCAN (2014) forma hombres y mujeres con conocimientos, saberes, capacidades, valores, actitudes humanistas, sentido de emprendimiento e innovación para el fortalecimiento del sistema autonómico regional del país, en equilibrio y armonía con la Madre Tierra; todo ello bajo unos principios de autonomía, equidad, interculturalidad, servicio comunitario, unidad nacional, identidad cultural, construcción colectiva y cultura de calidad. Todo aunado a un objetivo que valora la educación con función social:

Educar a hombres y mujeres comprometidos y comprometidas con el desarrollo humano sostenible de su comunidad y región y con la práctica permanente de la interculturalidad, con una sólida preparación científica, técnica y humanistas, orgullosos de su identidad étnica, cultural y lingüística y que contribuya al proyecto de unidad nacional en la diversidad (URACCAN, 2009, p. 14).

En Tinoco (2011) se estudiaron las trayectorias académicas de diez estudiantes indígenas y afrodescendientes. En dicho estudio, se analizaron los relatos de dichos estudiantes en relación a su historia de vida en el periodo de preparatoria y posterior profesionalización. La investigación reveló que la práctica de la enseñanza a poblaciones indígenas realizada, de manera sistemática, y la explicación formal de los temas en la lengua indígena correspondiente facilita el proceso de comprensión de estos estudiantes; en este caso particular, en Miskitu, que es la lengua materna de la mayoría de estudiantes. Así mismo, expresaron que el uso del idioma materno por parte del profesor para la comunicación informal en el aula de clases contribuye a que la clase sea más motivadora. El panorama que se presenta en relación con la formación de los grupos y el trabajo en sí mismo, resalta varios aspectos. Se describen dos escenarios observados en el aula. Uno evidencia que el uso de la lengua materna en el aula de clases incide en la interacción docente-estudiantes. La otra evidencia que el uso del repertorio bilingüe y trilingüe en el aula de clases multicultural y multilingüe se convierte en una práctica exitosa.

Conviene, entonces, considerar que trabajar las matemáticas desde una perspectiva intercultural sugiere también organizar el currículo y la planificación de manera que ésta tenga una presencia consciente y continua en el ambiente escolar. Esto significa que, desde esta dirección, entendemos que la interculturalidad no se limita solamente a, o no debería consistir solamente en, un contenido, tema, unidad, materia o estrategia específica. Igualmente debe fundamentar integralmente todo el diseño curricular (Walsh, 2001).

Específicamente de la experiencia en la universidad URACCAN surgen recomendaciones para clases de matemáticas donde se involucran poblaciones indígenas:

- Desarrollar un sentido positivo de sí mismo y expresar sus sentimientos actuando con iniciativa, autonomía y percibiendo sus logros al realizar actividades individuales o en colaboración.
- Asumir roles distintos en el juego y en otras actividades para trabajar en colaboración, apoyarse entre compañeras y compañeros, resolver conflictos a través del diálogo y reconocer y respetar las reglas de convivencia en el aula, en la universidad y fuera de ella.
- Reconocer los rasgos culturales distintos (lenguas, tradiciones, formas de ser y vivir) de las personas y grupos, compartiendo experiencias de su vida familiar y fuentes de información (otras personas, medios de comunicación masiva a su alcance: impresos electrónicos).
- Expresar, dialogar y conversar en lengua materna, mejorar su capacidad de escucha, ampliar su vocabulario y enriquecer su lenguaje oral en diversas situaciones y contextos comunicativos.

Además, recomiendan conocer términos que se utilizan en diferentes grupos y reconocer el significado de palabras, expresiones, canciones o textos. Asimismo, se insta a aprender a rechazar cualquier discriminación por condición u origen social, género o etnia, nacionalidad u orientación cultural, sexual, religiosa o contexto de hábitat, condición física, intelectual o lingüística. También a ser capaces de resolver problemas de manera creativa mediante situaciones de juego que impliquen la reflexión, la explicación y la búsqueda de soluciones a través de estrategias o procedimientos propios, y su comparación con los utilizados por otros. Otro de los objetivos es interesarse por la observación de fenómenos naturales, participando en situaciones de experimentación que abran oportunidades para preguntar, predecir, comparar, registrar, elaborar explicaciones e intercambiar opiniones sobre procesos de transformación del mundo natural y social inmediato, adquiriendo actitudes favorable hacia el cuidado y la preservación del medio ambiente, que recuperen los saberes y experiencias de los pueblos indígenas, afrodescendientes y mestizos.

Los hallazgos de investigación, así como las recomendaciones provenientes de experiencias que se caracterizan como de investigación-acción participativa, previamente mencionadas, pueden sintetizarse desde la didáctica de las matemáticas. Por una parte, pueden reducirse como acciones de intervención del formador de estudiantes en contexto de diversidad en las primeras instancias de realización, a través del diseño, la gestión y la evaluación reflexiva que asume unos propósitos de formación a través de la gestión de fines educativos específicos que articulan los niveles global y local de planificación. Por otra parte, como toma de conciencia explícita de formas específicas de mediación semiótica, entre las que se privilegia la lengua materna para la elaboración de aprendizajes matemáticos en situaciones cordiales de negociación de significados en el aula. Por último, una toma de conciencia implícita acerca de la productividad de la interacción profesor-estudiante y estudiante-profesor en el sistema multilingüe para percatarse de esas formas de mediación semiótica y, entre ellas, la lengua materna como forma privilegiada.

5.10 AMBIENTES INTERCULTURALES Y PLURITECNOLÓGICOS DESARROLLAN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN Y PARA LA DIVERSIDAD

El desarrollo de ambientes de aprendizajes en entornos escolares exige considerar el currículo desde una perspectiva ambiental de la educación que necesariamente incorpora aspectos ecológicos, psicológicos y comunicativos, los cuales se articulan con propósitos didácticos para constituir una perspectiva bioecológica, tanto en la educación en general, como en la didáctica de las matemáticas, en particular (Calderón, León, & INCI, 2010). En el ambiente de aprendizaje ingresan, se instauran y se desarrollan formas de trabajo,

de relaciones socioculturales y discursivas que están relacionadas con el estudio. También participan la reflexión y la solución de problemas alrededor de temas escolares. Quienes consideran prioritariamente condiciones de edad, género, desarrollo intelectual y social, así como condiciones físicas, fisiológicas y sensoriales, con el fin de adecuar todos los aspectos intervinientes para facilitar el trabajo escolar en ese ambiente (León et al. 2014). En Calderón y León (2010) se destaca la importancia de reconocer que el ambiente de aprendizaje proporciona condiciones para que todas las personas del grupo tengan acceso al conocimiento y actividades propuestas, así como contacto con los materiales para abarcar un amplio abanico de aprendizajes cognitivos, afectivos y sociales.

La educación matemática en contextos multiculturales y con pertinencia social tiene como propósito desarrollar habilidades para la convivencia social entre diversos y eliminar las brechas educativas entre diferentes tipos de poblaciones (León et al., 2014). Desde esta perspectiva, la educación matemática está orientada al fortalecimiento de competencias científico-técnicas para el avance de la educación en la autonomía regional, el desarrollo con identidad apuntando hacia al buen vivir, el vivir bien y el vivir con dignidad en una ciudadanía intercultural. En el aprendizaje de las matemáticas, las tareas, actividades o situaciones-problema que articulan los ambientes de aprendizaje tienen como objetivo posibilitar que los estudiantes re-signifiquen su conocimiento matemático y didáctico, ampliándolo y complejizándolo. Así mismo, les permite tener experiencias en estas actividades, a la vez que proveen a los estudiantes los instrumentos de mediación adecuados. En el caso de las matemáticas, tales instrumentos son de dos tipos:

- **Conceptuales:** provenientes de la didáctica de las matemáticas y de las matemáticas escolares.
- **Físicos:** como las tecnologías digitales o los llamados materiales, recursos y artefactos didácticos.

El aprendizaje de las matemáticas en contexto de diversidad debe tomar en cuenta el enfoque de nociones básicas de las TIC, el enfoque de profundización del conocimiento y el enfoque de generación de conocimiento que vincula las políticas educativas al desarrollo económico (UNESCO, 2008). Se sabe que el profesor como mediador es quien debe orientar el proceso educativo formal, por lo tanto, debe estar al día sobre el uso de las nuevas tecnologías y dominarlas de manera que pueda hacer un uso fructífero de éstas. Pero el uso de la tecnología debe estar incorporado en un ambiente de aprendizaje propicio y estable en el que es el profesor quien diseña e implementa un proceso de aprendizaje que va a transformar la información en un conocimiento significativo donde los niños y jóvenes participan con sus conocimientos emociones, expectativas y realidades, y donde las tecnologías pueden sólo jugar un rol secundario (Jiménez, Espinoza, & Morales, 2011).

Para la UNESCO (2008) el profesor es responsable y protagonista, pero su formación debe ser una acción reflexionada. Este hecho se evidencia en el papel que juega la formación en el desarrollo de competencias en dos de los enfoques: el enfoque de profundización del conocimiento; y el enfoque de generación del conocimiento; que favorecen un aprendizaje de las matemáticas en y para la diversidad.

Tabla 5.7: Enfoques en la formación con el uso de las TIC

El enfoque de profundización del conocimiento	El enfoque de generación del conocimiento	Competencias desarrolladas
Exigencias curriculares: requiere introducir cambios en el currículo que hagan hincapié en la comprensión con profundidad, más que la amplitud del contenido que se enseña. Exige evaluaciones centradas en la aplicación de lo comprendido en problemas del mundo real y prioridades sociales.	Exigencias curriculares: es ir más allá de los conocimientos de las asignaturas escolares y explorar los conocimientos exigidos para el desarrollo futuro. La evaluación es en sí misma parte del proceso, los estudiantes deben ser capaces de evaluar la calidad de sus productos.	Conocimiento profundo de las asignaturas y de sus posibilidades de aplicación. Conocimientos de problemas complejos para plantear a los estudiantes. Conocimiento de procesos cognitivos complejos. Conocimiento de cómo aprenden los estudiantes y de los tropiezos de esos aprendizajes.
Exigencia pedagógicas: la pedagogía asociada con este enfoque comprende el aprendizaje colaborativo y el aprendizaje basado en problemas y proyectos.	Exigencias pedagógicas: los estudiantes se organizan en comunidades de aprendizaje para desarrollar conocimientos, fundamentándose en los conocimientos de otras comunidades y en los conocimientos propios.	Competencias de diseño y seguimiento de estudiantes en sus exploraciones y conjeturas. Modelación de procesos de aprendizaje estructuración de situaciones de aprendizaje para aplicación de competencias cognitivas.
Exigencias a los ambientes escolares: estructura y periodos de clases dinámicos, los estudiantes trabajan en grupos buena parte del tiempo.	Exigencias a los ambientes escolares: las escuelas se transforman en organizaciones de aprendizaje, en las que todos los involucrados participan en acciones de aprendizaje.	Capacidad para generar ambientes de aprendizaje flexibles, con integración de actividades centradas en el estudiante y flexibles al uso de tecnologías. Capacidad de liderazgo en la formación de estudiantes, así como en el desarrollo de una institución productora de conocimiento en ambientes tecnológicos.

Fuente: UNESCO (2008).

Además de las tecnologías en el aula, existen los espacios de interacción que se integran en las plataformas digitales o entornos de participación mixta (presencial y virtual). Éstos pueden potenciar la participación de los estudiantes integrando diferentes tipos de actividades como ya se mencionó. Por otro lado, la variedad de usos de diversos instrumentos tecnológicos, que vinculan una forma de ser con una forma de participar y en las que se disponen formas de decir, de intervenir o de cosificar, permiten a los estudiantes aprender

con otros, apoyados en medios de expresión propios de cada tecnología. Ello posibilita la constitución del aprendizaje, en particular, del aprendizaje del estudiante que aprende en contexto de diversidad y favorece el ingreso paulatino a la comunidad de práctica, en un vínculo entre lo local y lo global, lo particular y lo general (León et al., 2014). Es importante señalar que no todos los instrumentos tecnológicos son accesibles a los usuarios, en especial si se trata de poblaciones en contexto de diversidad.

Por tanto, además de reconocer las diferentes herramientas tecnológicas que se pueden emplear en el aprendizaje de las matemáticas, se hace imprescindible reconocer las pautas de accesibilidad y lineamientos de usabilidad que permitan que el usuario interactúe y acceda al conocimiento que hay en las páginas web. Es preciso considerar, en la creación de recursos y herramientas con incorporación de las TIC, los principios del diseño universal mediante los cuales se garantiza:

- **Uso equitativo:** el diseño es útil y comercializable para las personas, independientemente de sus habilidades.
- **Flexibilidad en su uso:** el diseño se adecúa a una amplia gama de capacidades y preferencias individuales.
- **Simple e intuitivo:** el diseño es fácil de entender, independientemente de la experiencia del usuario, de los conocimientos, de las competencias lingüísticas o del nivel concentración que tenga.
- **Información fácil de percibir:** el diseño comunica la información necesaria de manera eficaz, independientemente de las condiciones ambientales o de la capacidad sensorial que el usuario posea.
- **Tolerancia a errores:** el diseño minimiza los riesgos y las consecuencias negativas de acciones no deseadas o accidentales.
- **Bajo esfuerzo físicos:** el diseño puede ser utilizado de manera eficiente y cómoda con un mínimo esfuerzo.
- **Dimensiones y espacios apropiados:** el tamaño y espacio del material apropiado para su alcance, manipulación y uso de acuerdo con el enfoque con el que fue creado, independientemente de la estatura, complexión, postura o movilidad del usuario.

Por otra parte, las tecnologías accesibles han generado, en el campo educativo, la necesidad de considerar el diseño de objetos virtuales de aprendizaje (OVA) como respuesta a las necesidades de uso de la tecnología para el aprendizaje y para la colaboración. En León et al. (2014) el interés por los objetos virtuales de aprendizaje se relaciona con dos elementos centrales para la didáctica:

- La posibilidad de materializar las relaciones didácticas aprovechando las tecnologías: entre estudiantes con distintas condiciones sensoriales, físicas y culturales; contenidos escolares expresados en distintas representaciones y modos de comunicar; y profesores que han concebido estas relaciones desde la perspectiva de facilitar y cualificar los aprendizajes.
- La producción colaborativa de propuestas de diseños didácticos con incorporación de tecnologías accesibles. Se concibe esta colaboración tanto en la generación de los objetos virtuales de aprendizaje con la participación de profesores e ingenieros, como en la posibilidad de producir objetos por comunidades de práctica de formadores de profesores, que pueden ser reutilizados por otros profesores.

En este contexto, es importante producir los diseños didácticos y los objetos virtuales de aprendizaje, así como proponer estrategias para el almacenamiento, la búsqueda y el uso de estos objetos. Es decir, participar también en la construcción de los repositorios en los que estarían alojados los objetos virtuales de aprendizaje, garantizando su disponibilidad, adaptabilidad y su capacidad de reutilización por otros y en otros contextos.

Aunque no hay aún acuerdos entre los expertos sobre una única definición de objetos virtuales de aprendizaje, en León et al. (2014) se considera importante destacar las siguientes características:

- Es un todo, una unidad instrumental (documentos electrónicos, archivos) y una unidad simbólica (portadora de un lenguaje específico y mediadora del aprendizaje).
- Es un medio de aprendizaje que ha sido construido para ese propósito.
- Es reutilizable porque han sido construidos para que otros puedan usarlos. Por lo tanto, deben tener cualidades de durabilidad.
- Es un objeto de la red porque incluye tanto las redes computacionales, como las redes de apoyo, de profesionales, las redes sociales, etc.
- Es accesible, el contenido está dispuesto para circular en todo componente de entrada o de salida de la red y para cualquier usuario. En ese sentido tiene característica de adaptabilidad.

Para diseñar un objeto virtual de aprendizaje es necesario tener en cuenta dos tipos de acciones; la pedagógica-didáctica y la del diseño de la producción, edición y utilización de las tecnologías accesibles apropiadas. El diseño pedagógico y didáctico en León et al. (2013), Calderón et al. (2013) y García et al. (2013), es una acción que involucra la definición y delimitación pedagógica y didáctica en la que se especifican, entre otros, los siguientes:

- Quiénes serán los usuarios de este objeto de aprendizaje y qué saben de lo que se pretende que aborden. Las respuestas a estas preguntas permiten delinear las rutas de aprendizaje y, sobre todo, definir los ámbitos de flexibilidad que se tendrán.
- El enfoque didáctico que adoptará. Se delimita la perspectiva de aprendizaje y el tipo de enseñanza que es coherente con ella y cómo el uso de las tecnologías accesibles posibilita dichos procesos. En León et al. (2013), Calderón et al. (2013) y García et al. (2013), se privilegia el diseño de situaciones de aprendizaje enmarcado en una perspectiva sociocultural en la que se concede especial importancia a las comunidades de prácticas en contexto de diversidad.
- Los objetos de aprendizaje. Dada la perspectiva de aprendizaje adoptada, los objetos de aprendizaje se plantean en términos de la adquisición de instrumentos de la práctica que se enseña y se pone especial énfasis en los procesos en detrimento de los resultados. Un aspecto importante es reconocer que se aprende en interacción con los otros y que estos otros representan la diversidad como valor pedagógico y didáctico.
- Definición de las estrategias de aprendizaje. Se pone especial énfasis en cuatro grandes estrategias: de reflexión sobre la acción o de metacognición, de participación, de negociación de significados y de cosificación. De tal suerte que el papel del profesor privilegia dos acciones que posibilitan una construcción colectiva de significados y una constitución de identidades, la regulación y la promoción de interacciones, de manera que se genere la constitución de las comunidades de aprendizaje.
- De este proceso surge, naturalmente, la pregunta de por qué otras estrategias propician el uso de las tecnologías accesibles y cuáles de ellas son útiles para promover la diversidad. Por ejemplo, estructuras de clases que combinan los trabajos individuales, en grupos pequeños (de dos, de tres, de más personas) y en plenarios pueden favorecer la construcción individual y colectiva y la discusión.
- El modelo de evaluación. La evaluación se asume como un proceso y como parte del aprendizaje, no como un ejercicio de reproducción, generalmente memorística, de conocimientos. Se promueven procesos de autoevaluación, co-evaluación y heteroevaluación.
- Actividades de aprendizaje. Son todas aquellas actividades denominadas tareas o actividades auténticas. Corresponden a cuestiones que tratan acerca de problemas relacionados con las tareas de diseño y deben hacer un uso intensivo de las tecnologías, por ejemplo, de software especializados.
- Delimitación de los entornos en los que se desarrollen las actividades. Considerar las cualidades de los entornos puede permitir identificar herramientas de comunicación e interacciones sincrónicas y asincrónicas, tales como foros, wikis o cualquier otra herramienta de medición que permite la construcción conjunta a través de la participación y la cosificación.

- Los recursos de comunicación. Los objetos de aprendizaje pueden integrar diferentes recursos para la comunicación, por ejemplo, los videos, los traductores entre lenguas, las imágenes o los lectores de pantalla, entre otros. Esta integración tiene que tener como referente la propuesta pedagógica y didáctica, garantizando que los estudiantes puedan interactuar con el objeto ya que éste está disponible y utilizable.

Íntimamente relacionado con la adopción de una perspectiva pedagógica y didáctica, se halla el diseño gráfico y computacional, en el cual se decide, entre otras cuestiones, el tipo de accesibilidad, de imágenes, de letras, de dispositivos tecnológicos, etc. Ésta es una tarea de trabajo interdisciplinario entre los profesionales informáticos y los didactas. Una vez terminadas estas dos acciones, se tiene un diseño inicial que debe tener un grado de flexibilidad que le permita cumplir con las condiciones del diseño universal y con los requerimientos de incorporación de la diversidad y someterse a los embates de la experimentación. El diseño universal de aprendizaje tiene por objetivo, justamente, el hacerse cargo de estas barreras y reestructurar el currículo de manera tal que sea accesible acorde a las necesidades de todos los estudiantes. Esto se debe a que no necesariamente son los estudiantes en contexto de diversidad quienes se encuentran con estos obstáculos, sino que incluso estudiantes que poseen ritmos y estilo de aprendizaje diversos pueden fracasar en sus procesos de aprendizaje.

5.11 LA EVALUACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN Y PARA LA DIVERSIDAD

La educación como hecho social es un proceso de construcción personal y colectivo que permite al hombre y a la mujer tomar conciencia del contexto que lo condiciona, aprenderlo, comprenderlo, valorarlo y poder actuar e incidir en él de forma positiva. Evaluar estos procesos implica redefinir la evaluación. Según Roncal (2005), existe necesidad de construir colectivamente tanto el concepto de evaluación, como el del campo que se evalúa. Significa no aceptar como dados estos conceptos, sino elaborarlos juntos, vinculándolos a la concepción de persona, de sociedad, de conocimiento y de relación persona-conocimiento-sociedad que construyamos.

La evaluación en el aula es crucial para el aprendizaje de los estudiantes. Una razón principal de esto es que a través de aulas docentes de evaluación se puede recopilar información sobre las capacidades y nivel de entendimiento para tomar decisiones sobre nuevas instrucciones de sus alumnos. Con base en esta información, los maestros pueden adaptar su enseñanza a las necesidades de sus alumnos y crear un entorno de aprendizaje ideal para ellos en su salón de clases. Por lo tanto, el uso de la evaluación en el aula como una parte

integral de la educación ha sido nombrada como una de las actividades más importantes que debe abordar el docente para mejorar el logro del estudiante.

En cuanto a la evaluación en un contexto de poblaciones diversas, se hace necesario considerar, entre otros, los siguientes aspectos para mejorar el proceso evaluativos en el aula:

- La importancia de la evaluación radica en el acercamiento del individuo a las normas y pautas culturales que permiten salvaguardar la identidad del pueblo.
- Una de las características de la evaluación para poblaciones indígenas, afrodescendientes y mestizas es que se da la relación estrecha de padre-hijo, madre-hija y otros parientes en el momento mismo en el que el hijo o la hija realizan determinada actividad. Se evalúa diariamente.
- La evaluación para este tipo de poblaciones también se caracteriza por su carácter cualitativo y es integral porque se consideran todos los ámbitos de la vida del niño o niña: afectivo, cognoscitivo y psicomotor.
- El aspecto valorativo en la evaluación para este contexto diverso es una responsabilidad colectiva, en la medida que participan todos los miembros de la comunidad, tanto mayores, como grupos de igual edad.
- Los niños se enfrentan a dos paradigmas: la escuela sanciona y la educación en contexto de diversidad pretende hacer personas mejores, capaces de dar solución a problemas y desenvolverse en su medio.

En Arévalo, Pardo & Vigil (2006) se expresa que el propósito de la educación es responder a las necesidades de potenciar el desarrollo integral de cada estudiante y a la necesidad de producir y reproducir la parte cultural de la comunidad. En este sentido, se debe plantear en la escuela el enfoque cualitativo de la evaluación donde el evaluador debe tratar de interpretar el significado de las conductas de los individuos y no simplemente establecer cantidad y tipo de conducta. En el contexto de las poblaciones diversas, la evaluación ha de considerar las características individuales y socioculturales y partir del reconocimiento de la diversidad en sí misma. En Roncal (2005) se confirma que estos aspectos posibilitan la emergencia de la singularidad de los estudiantes, quien conlleva un andamiaje y equipamiento cultural, afectivo, social, intelectual y en particular y único.

5.12 CONCLUSIONES

En este capítulo se han presentado las claves para que una didáctica de las matemáticas inclusiva emerja en los procesos de la instrucción matemática de estudiantes en contexto de diversidad. Se propone una didáctica de las matemáticas orientada a configurar

prácticas matemáticas basadas en lo que en educación matemática suele nombrarse como matemática para todos y con todos. Así, es necesario diseñar situaciones didácticas con ambientes interculturales y pluritecnológicos que posibiliten:

- El fomento de la interacción comunicativa entre diversos (poblaciones con lenguas diferentes a la lengua de las mayorías o con la lengua de las mayorías).
- La selección y uso de uno o varios dispositivos didácticos que permitan la articulación de estrategias. La resolución de problemas, los juegos y los proyectos de aula, como dispositivos, en tanto que consolidan ambientes didácticos en los que los fenómenos de exploración del contexto promueven la caracterización de un punto de vista matemático en el ambiente.
- La selección y uso de un sistema de tecnologías que se articulan en los ambientes, como mediaciones semióticas o instrumentales en las relaciones de aprendizaje, o como objetos de aprendizajes necesarios en los desarrollos de una actitud matemáticas.

En este sentido, el reconocimiento de la diversidad que se desea promover en la didáctica de las matemáticas es el de la necesidad de dignificar la producción matemática de todos los participantes en el ambiente de aprendizaje. En conclusión, no se trata sólo de posibilitar múltiples maneras de desarrollo de matemáticas presentes en el ambiente, sino también de brindar formas de tomar conciencia de la importancia del desarrollo matemático logrado.

CAPÍTULO 6:

ADAPTACIÓN Y VALIDACIÓN DE UN CUESTIONARIO SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

“Para que los estudiantes vean a las matemáticas como una actividad con sentido, necesitan aprenderlas en un salón de clases que sea un microcosmo de la cultura matemática. Es decir, clases donde los valores de las matemáticas como una disciplina se reflejen en la práctica cotidiana. Así, para la educación matemática el asunto es cultural. ¿Cómo se puede crear un ambiente de clases que refleje una cultura matemática real?” (Schoenfeld, 1998, p. 88).

6.1 INTRODUCCIÓN

Un instrumento de evaluación tiene como finalidad proporcionar información sobre los significados personales de un grupo de estudiantes sobre un objeto o un grupo de objetos matemáticos dados, y la investigación encaminada a la construcción de estos instrumentos o el análisis de las respuestas a los mismo entraría en el campo de la semiometría (Godino, 2002). La semiometría contempla lo que se puede describir como estática de significados sistémicos, es decir la característica de la trama de las funciones semióticas (o al menos una muestra representativa de tal trama) en las cuales un objeto se pone en juego en un contexto y circunstancias fijadas (Batanero & Díaz, 2003). La medida de tales significados (sistemas de prácticas) tiene un carácter cualitativo y es relativa a una persona, institución, contexto fenomenológico y momento temporal especificado. Aunque el objeto de estudio de la evaluación es el significado personal, este proceso no puede dejar de lado la faceta institucional de los objetos matemáticos, que sirven de pauta de comparación con los significados personales evaluados (Godino, 2003).

Para Batanero y Díaz (2003) ni el significado holístico o global de un objeto de enseñanza ni siquiera los significados prendidos o implementados en una enseñanza sobre dicho objeto pueden ser abarcados en un solo instrumento de evaluación. Tampoco el significado personal del estudiante puede ser explicitado completamente en las respuestas a tareas o la observación de su actividad durante una prueba. En este sentido, el objetivo de la evaluación es medir hasta qué punto los estudiantes a los que se les presentan problemas matemáticos pueden activar sus conocimientos para poder resolverlos. Por consiguiente, en este capítulo se describirá brevemente el proceso seguido en la adaptación y validación de un cuestionario dirigido a evaluar la comprensión de la práctica de resolución de problemas por estudiantes universitarios. El objetivo principal es reflexionar sobre la información que diferentes tipos de análisis psicométricos pueden proporcionar respecto a las posibilidades de generalización en la investigación educativa, así como la complejidad de la función evaluadora y los diferentes niveles y tipos de significados personales e institucionales involucrados.

Por lo tanto, se puntualizan, de manera breve, algunos aspectos sobre la evaluación del conocimiento matemático; la descripción del instrumento; y el proceso de adaptación y validación del instrumento de medida.

6.2 LA EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

En OECD (2005) se hace referencias a un concepto de matemáticas vinculado a la capacidad de los estudiantes de analizar, razonar y comunicarse eficazmente cuando formulan, resuelven e interpretan problemas matemáticos en diversas situaciones. En este sentido, el conocimiento matemático es evaluado en función de tres dimensiones: el contenido al que se refieren los problemas matemáticos; los procesos que deben activarse para conectar los fenómenos observados con las matemáticas y resolver así problemas correspondientes; y, por último, las situaciones y los contextos utilizados como fuente de materiales de estímulo y en los que se plantean los problemas.

Concerniente al contenido nos basamos en las ideas de Frege (1996) sobre sentido y referencia, quien sostiene que los diferentes significados de un concepto matemático vienen dados por las estructuras conceptuales que se insertan, por los sistemas de símbolo que lo representan, y por los objetos y fenómenos de los que surge y que le dan sentido. Rico (2006) adecua la terna de Frege, Signo-Sentido-Referencia, para caracterizar el significado de un concepto matemático en contextos educativos. En esta reflexión sobre contenidos, que corresponde al estudio curricular, el significado de un concepto matemático educativo se establece mediante la terna Representación-Fenómeno-Definición.

Igualmente, Rico (1997), dice que resulta difícil asumir que hay multiplicidad de significados para un mismo concepto matemático, ya que hay diversos sistemas de signos para su representación e, igualmente, hay diversos objetos (fenómenos) que refieren y dan distintos sentidos a un mismo concepto. Por eso es factible entender que hay pluralidad de significados para un mismo concepto matemático. Determinar los significados más relevantes de cada concepto es uno de los retos de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, es decir, una tarea de investigación del profesor de matemáticas para así transmitir a los estudiantes los significados culturales y científicos de las matemáticas. “Entender diferentes significados de un mismo concepto proporciona su comprensión” (Rico, 2006, p. 285). En este contexto, las ideas fundamentales adoptada por OECD (2005), que satisfacen las condiciones de respetar el desarrollo histórico, cubrir el dominio y contribuir a la reflexión de las líneas principales del currículo escolar, son: cantidad, espacio y forma, cambios y relaciones, incertidumbre.

El conjunto de las cuatro áreas de contenidos cubre el abanico de las necesidades matemáticas de los estudiantes como base para su vida y para ampliar su horizonte de las matemáticas. Los conceptos pueden relacionarse con áreas como la aritmética, el álgebra o la geometría, y sus correspondientes sub-áreas, que reflejan las ramas definidas del pensamiento matemático y que facilitan el desarrollo de un programa de enseñanza estructu-

rado. En general, estas categorías de contenidos aseguran que las tareas utilizadas para la evaluación tienen una distribución suficiente a lo largo del currículo, pero al mismo tiempo en un número no muy amplio que evite una división excesiva. Las cuatro áreas establecen los valores considerados para la variable contenido, que es una de las que identifican las tareas y determinan la evaluación (Rico, 2006).

La evaluación de las matemáticas exige que los estudiantes se enfrenten a problemas matemáticos basados en un contexto del mundo real, en que tienen que identificar las características de la situación del problema que podría ser susceptible de investigación matemática y activar los procesos matemáticos necesarios (OECD, 2004). Para hacerlo, deben llevar a cabo un proceso de matematización, el cual consiste en traducir los problemas desde el mundo real al matemático, por lo que se sustenta en varios procesos entre ellos: pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, representar, modelar, representar y plantear y resolver problemas (NCTM, 2000; TIMSS, 2003; OECD, 2005).

Tabla 6.1: Descriptores del proceso de matematización

Proceso Matemático	Descripción
Pensar y razonar:	Pensar en matemática es construir conocimiento matemático en situaciones donde tenga sentido, experimentar, intuir, relacionar conceptos y abstraer. Razonar en matemáticas es realizar deducciones e inducciones, particularizar y generalizar; argumentar las decisiones, así como los procesos y las técnicas (Alsina, 2004).
Argumentar y justificar:	Conjunto de habilidades, conocimientos y actitudes dirigidas a la explicación de determinados procesos, entre las capacidades que incluye está la manera en que explica la solución de un problema, cómo se justifica la solución del mismo y cómo se demuestra su solución (Tobón, 2007).
Comunicar:	Capacidad de expresarse tanto de manera oral, como escrita con referencia a asuntos con contenidos matemáticos, abarcar las capacidades de la forma en que se expresa y representa información matemática y la manera en que se interpreta dicha información (Niss, 2002), ayuda a los estudiantes a organizar y consolidar su pensamiento matemático, debido a que representa una de las claves para la profundización de la comprensión matemática (Silbey, 2003).
Modelar:	Se entiende así las matemáticas como un conjunto de ideas y formas de actuar que conllevan a obtener modelos e identificar relaciones y estructuras (Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez & Escorial, 2012).
Representar:	Habilidad para utilizar y relacionar los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemáticos (Castro, et al, 2012).
Plantear y resolver problemas:	Habilidad práctica para resolver lo desconocido, comprende las capacidades de identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas matemáticos utilizando una variedad de métodos (Niss, 2002).

Fuente: Elaboración propia.

Los procesos matemáticos descritos, formalizan la matematización en la resolución de problemas matemáticos. Según Pajares, Sanz y Rico (2004) su utilidad se concreta en establecer capacidades y habilidades específicas que ayudan a modular los objetivos, a establecer tareas escolares y caracterizar las propuestas de trabajo y las evaluaciones. Las capacidades y habilidades puestas en juego muestran que una persona es competente en matemáticas, son expresión de su conocimiento matemático. Los objetivos de aprendizaje de manera concreta son las habilidades que se necesitan para un determinado tema y en un determinado momento.

Referente a la situación o problema, existen cuatro tipos de situaciones: personales, educativas u ocupacionales, públicas y científicas. Es decir, la variable situación ha tomado cuatro valores, que se identifican en la presentación de los ítems propuestos. Las situaciones permiten establecer la localización de un problema en términos de los fenómenos de los que surge la situación problemática considerada (OECD, 2004):

- Las situaciones personales. Están directamente relacionadas con las actividades diarias de los estudiantes. Giran en torno a la forma en que un problema matemático afecta de inmediato al individuo y la forma en que el individuo percibe el contexto del problema. Estas situaciones tienden a exigir un alto grado de interpretación antes de que el problema pueda resolverse.
- Las situaciones educativas u ocupacionales. Se producen en la vida del estudiante, en el centro de estudios o en un entorno de trabajo. Giran en torno a la forma en que el centro educativo o el lugar de trabajo pueden obligar al estudiante o al trabajador a enfrentarse a un determinado tipo de problema que requiere una solución matemática.
- La situación pública relacionada con la comunidad u otra más amplia. Exigen que los estudiantes observen un determinado aspecto de su entorno. Generalmente se trata de situaciones que encuadran en la comunidad y giran en torno a la forma en que los estudiantes entienden las relaciones entre los elementos de su entorno. Requieren que los estudiantes activen su comprensión, conocimiento y habilidades matemáticas para evaluar los aspectos de una situación externa que puede tener repercusiones importantes en la vida pública.
- Las situaciones científicas. Son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una situación teórica o un problema explícitamente matemático. El marco de las matemáticas de OECD (2005) incluye en esta categoría situaciones matemáticas relativamente abstractas a lo cual los estudiantes se enfrentan con frecuencia en la clase de matemáticas y que no consisten en otra cosa que elementos matemáticos explícitos, sin pretensión alguna de situar el problema en un contexto más amplio, es decir, en un contexto intra-matemático.

La aproximación fenomenológica y los contextos y situaciones donde se plantean los problemas constituyen los ejes centrales que dotan de sentido al conocimiento matemático (Rico, 2006). Esta prioridad se basa en la consideración funcional de las matemáticas educativas, que destaca la importancia de conceptos y procedimientos matemáticos como herramientas para dar solución a problemas.

6.3 DESCRIPCIÓN DEL INSTRUMENTO

El instrumento de evaluación que se ha seleccionado para observar los procesos de resolución de problemas matemáticos, ha consistido en una prueba que mide competencias relacionadas con el álgebra (véase en el apartado de anexo 1, cuestionario cognitivo). Señalamos que, todas las respuestas posibles son argumentos correctos y argumentos incorrectos. Por tales razones, se empleó esta pauta de corrección para cada uno de los ítems, se utilizó el código (1) para argumentos correctos y (0) para argumentos incorrectos. Se trata de una prueba compuesta por 32 ítems en que se consideran los contenidos que se reflejan en la tabla 6.2.

Tabla 6.2: Contenido evaluado en el cuestionario cognitivo

Contenido Evaluado	Ítems
Propiedades de la adición y la multiplicación en $\mathbb{R}$.	1, 2, 4, 5, 8, 26.
Propiedades de orden de los números reales.	14, 22, 23, 24.
Proposiciones y funciones proposicionales	3, 6, 7, 10, 13, 15, 18, 19, 20, 25, 27, 32.
Ecuaciones de primer grado con una incógnita	9, 11, 16, 17, 29.
Resolución algebraica de problemas verbales	12, 21, 28, 30, 31.

Fuente: Elaboración propia.

Además, el cuestionario presenta las siguientes características:

- Es un test de diagnóstico ya que pretende detectar la existencia de problemas relacionados con la práctica de resolución de problemas (Gil, 2011).
- Está constituido por ítems de construcción y respuesta corta, es decir, son ítems con una unidad de medida que consta de un estímulo y una forma prescriptiva de respuesta y su fin es inferir la capacidad del examinado en un cierto constructo (habilidad, rasgo, etc.), proporcionando datos cuantificables sobre la persona que lo completa (Mayén, Cobo, Batanero, & Balderas, 2007).
- Es un marco de referencia Piagetiano, donde se destaca que el orden de sucesión de los ítems permanece invariante, aunque las edades cronológicas correspondientes a los ítems pueden variar mucho de una cultura a otra, de una persona a otra e incluso de una a otra tarea en una misma persona (Rojas & Romero, 1999).

- En su construcción, según Küchemann (1981), puntualiza la interpretación que puede darse a la letra en contextos algebraicos; pueden tipificarse de la siguiente manera:
 - a. La letra evaluada: A la letra se le da un valor numérico en lugar de tratarla como un valor desconocido.
 - b. Letra no usada: Aquí la letra se ignora, o a lo más es reconocida (pero sin darle un significado).
 - c. Letra como objeto: Se ve la letra como un nombre para un objeto, o como el objeto propiamente dicho.
 - d. La letra como incógnita: Aquí la letra se piensa como un número particular pero desconocido y el estudiante se lanza a operar con la letra vista de esta manera, a pesar de la falta de cerradura¹⁰ del resultado.
 - e. La letra como número generalizado: La letra se ve como representante de valores o capaz de tomar varios valores más que como un valor específico.
 - f. Letra como variable: La letra como variable representa un rango de valores y el estudiante es capaz de describir el grado con el cual los cambios en un conjunto se determinan por los cambios en otro (lo cual significa establecer, al menos, una relación de segundo orden).

6.4 PROCESO DE ADAPTACIÓN Y VALIDACIÓN DEL CUESTIONARIO

El proceso de adaptación y validación del cuestionario se efectuó usando la teoría clásica de los test. Entre los tipos de análisis se destaca: el análisis de dificultad, análisis de discriminación, análisis de fiabilidad, validez de contenido, validez de constructo y análisis de las puntuaciones globales (Muñiz, 1994; Barbero, 2003; Gill, 2011).

6.4.1 Participantes

El estudio se llevó a cabo con una muestra 80 estudiantes universitarios de los Grados de Informática Administrativa e Ingeniería Agroforestal de la Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense, pertenecientes a comunidades de la Región Autónoma del Caribe Norte de Nicaragua. La selección de las especialidades se realizó mediante un muestreo por conveniencia, es decir, por la accesibilidad y proximidad de los sujetos, al investigador. La edad media entre los participantes fue de 17 años, con un rango comprendido entre los 16 y los 19 años. La distribución por especialidad se resume en la tabla 6.3. El 61% de los participantes fueron hombres y el 39% restante fueron mujeres.

¹⁰ Propiedad de Cerradura: Cuando se suman números naturales el resultado es siempre un número natural. Por ejemplo $a+b=c$.

Tabla 6.3: Distribución de la muestra por especialidad en la adaptación del cuestionario cognitivo

	Especialidad	Hombres	Mujeres	Total	%
Validos	Informática Administrativa	18	21	39	49
	Ingeniería Agroforestal	31	10	41	51
	Total	49	31	80	
	%	61	39		100%

Fuente: Elaboración propia.

La administración del instrumento se realizó por parte de los autores durante el curso académico 2013-2014. Tenían un carácter anónimo y fueron complementados por los sujetos de la muestra en presencia del profesor. Con anterioridad a la toma de los datos, se obtuvo tanto el consentimiento informado de los estudiantes, de los profesores como la aprobación de las autoridades de la Universidad.

6.4.2 Análisis del índice de dificultad

El índice de dificultad valora la dificultad que entraña la resolución de ítem para la población a la que va dirigida el cuestionario (Muñiz, 1994). Este índice, permite ordenar los ítems en función de su dificultad y puede ayudar a la selección de ítems en función de los objetivos y facilitan la discriminación. Puesto que el índice de dificultad es una proporción (la proporción de estudiantes que superan el ítem) calculamos adicionalmente los intervalos de confianza de dicha proporción con la fórmula habitual, véase la tabla 6.4.

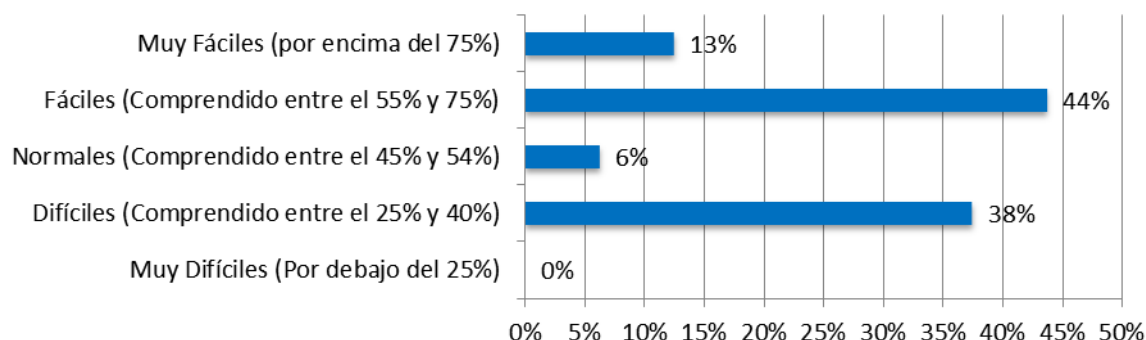
Tabla 6.4: Proporciones de acierto en la adaptación del cuestionario cognitivo

k	p	L(-)	L(+)	k	p	L(-)	L(+)	k	p	L(-)	L(+)	k	p	L(-)	L(+)
1	0,68	0,57	0,78	9	0,63	0,52	0,73	17	0,60	0,49	0,71	25	0,30	0,20	0,40
2	0,73	0,63	0,83	10	0,40	0,29	0,50	18	0,43	0,31	0,54	26	0,89	0,82	0,95
3	0,88	0,80	0,95	11	0,68	0,57	0,78	19	0,40	0,29	0,51	27	0,61	0,50	0,72
4	0,60	0,49	0,70	12	0,40	0,29	0,51	20	0,60	0,49	0,71	28	0,50	0,39	0,61
5	0,38	0,26	0,48	13	0,68	0,57	0,78	21	0,50	0,39	0,61	29	0,63	0,52	0,73
6	0,63	0,52	0,73	14	0,73	0,63	0,83	22	0,63	0,52	0,73	30	0,40	0,29	0,51
7	0,26	0,16	0,36	15	0,33	0,22	0,43	23	0,40	0,29	0,51	31	0,85	0,77	0,93
8	0,33	0,22	0,42	16	0,30	0,20	0,40	24	0,60	0,49	0,71	32	0,86	0,79	0,94

Fuente: Elaboración propia.

Según Gil (2011), los valores del índice de dificultad de un ítem se suelen clasificar en cinco categorías: Muy fáciles (por encima de 0,75), Fáciles (comprendido entre 0,55 y 0,75), Normales (comprendido entre 0,45 y 0,54), Difíciles (comprendido entre 0,25 y 0,44) y Muy difíciles (por debajo de 0,25). Los índices de dificultad media son los que discriminan mejor (Batanero & Díaz, 2006). En este contexto, en la figura 6.1, se refleja la distribución de las categorías después de haber estimado las proporciones de acierto.

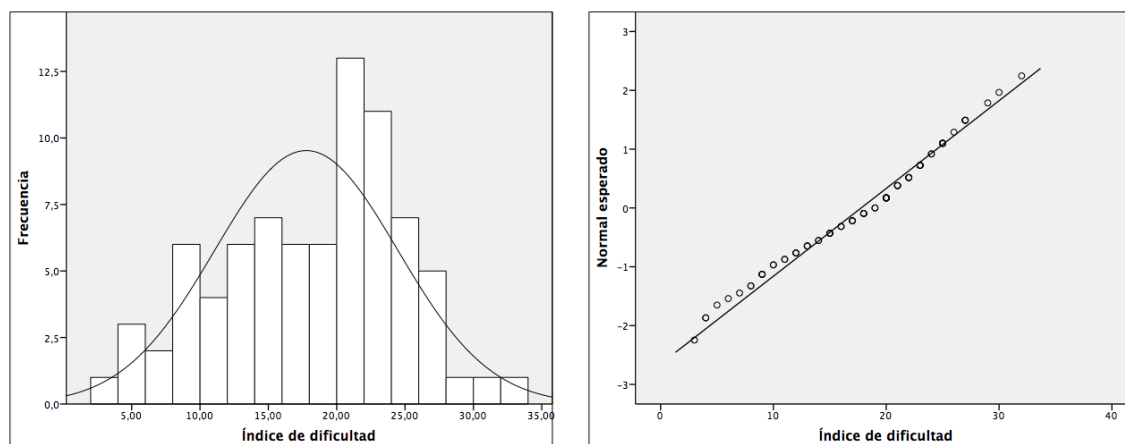
Figura 6.1: Categoría de dificultad de los ítems del cuestionario



Fuente: Elaboración propia.

Los resultados ponen de manifiesto que el 13% del total de los ítems son muy fáciles, un 44% del total demuestra una tendencia de fáciles, mientras que un 6% está razonablemente normal. Sin embargo, existe un 38% del total de los ítems difíciles para los estudiantes participantes en el estudio. En resumen, se puede decir que en conjunto la dificultad es medio-alta, puesto que los índices van de una dificultad difícil hasta una dificultad muy fácil, no hay ítem con dificultad muy difícil (índices inferiores al 25%). En la figura 6.2 se presenta la distribución de estos índices, que abarcan todo el posible rango de variación, con algo más de concentración en el intervalo 20-25 con un 95% de confianza.

Figura 6.2: Distribución del índice de dificultad de los ítems del cuestionario



Fuente: Elaboración propia.

6.4.3 Análisis del índice de discriminación

El índice de discriminación (Tabla 6.5) se calculó mediante la correlación corregida entre el ítem y la puntuación total del cuestionario. Todos los ítems tienen una correlación positiva (véase Tabla 6.5, r_{ix}).

Tabla 6.5: Índice de homogeneidad en el proceso de adaptación cuestionario cognitivo

k	r_{ix}	S_x	S_i	IH	k	r_{ix}	S_x	S_i	IH
1	0,457	6,702	0,471	0,399	17	0,647	6,702	0,493	0,601
2	0,450	6,702	0,449	0,394	18	0,321	6,702	0,497	0,252
3	0,163	6,702	0,333	0,114	19	0,449	6,702	0,493	0,387
4	0,647	6,702	0,493	0,601	20	0,647	6,702	0,493	0,601
5	0,499	6,702	0,487	0,441	21	0,522	6,702	0,503	0,464
6	0,614	6,702	0,487	0,566	22	0,614	6,702	0,487	0,566
7	0,528	6,702	0,443	0,478	23	0,303	6,702	0,493	0,234
8	0,504	6,702	0,471	0,449	24	0,647	6,702	0,493	0,601
9	0,300	6,702	0,487	0,232	25	0,374	6,702	0,461	0,313
10	0,503	6,702	0,493	0,445	26	0,338	6,702	0,318	0,295
11	0,530	6,702	0,471	0,477	27	0,311	6,702	0,490	0,243
12	0,303	6,702	0,493	0,234	28	0,522	6,702	0,503	0,464
13	0,457	6,702	0,471	0,399	29	0,614	6,702	0,487	0,566
14	0,450	6,702	0,449	0,394	30	0,449	6,702	0,493	0,387
15	0,504	6,702	0,471	0,449	31	0,212	6,702	0,359	0,160
16	0,260	6,702	0,461	0,194	32	0,439	6,702	0,347	0,396

Fuente: Elaboración propia.

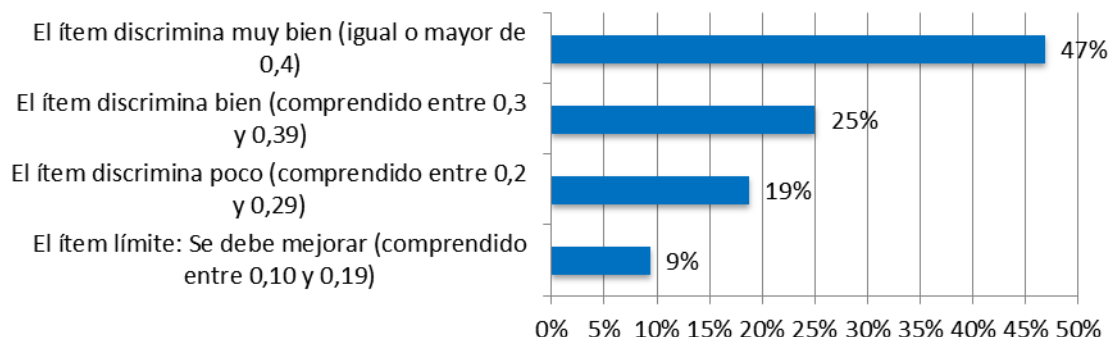
También se calculó el índice de homogeneidad IH (véase tabla 6.5) a través de la correlación ítems-test, desviación estándar del test y la desviación estándar de cada uno de los ítems. Para ello, se utilizó la expresión matemática siguiente:

$$r_{tt} = \frac{r_{ix} S_x - S_i}{\sqrt{(S_x^2 + S_i^2 - 2r_{ix} S_x S_i)}}$$

Consecuentemente se clasificó el índice de homogeneidad en los siguientes valores: el 47% de los ítems discriminan muy bien (igual o mayor de 0,4); un 25% discriminan bien (comprendido entre 0,3 y 0,39); un 19% discrimina poco (comprendido entre 0,2 y 0,29); y

el 9% del total de los ítems se deben mejorar (comprendido entre 0,10 y 0,19). En general, los ítems poseen una buena discriminación en el instrumento. Véase la figura 6.3.

Figura 6.3: Índice de discriminación del cuestionario



Fuente: Elaboración propia.

6.4.4 Análisis de fiabilidad

Se entiende por fiabilidad de un test, un cuestionario o instrumento de medida a la estabilidad de las puntuaciones observadas, en el sentido de proporcionar un valor numérico que indica el grado de confianza que se puede tener en dichas puntuaciones como estimadores de las puntuaciones verdaderas de los sujetos. En Batanero y Díaz (2003) se expresa que este coeficiente de fiabilidad es valor teórico que debe ser estimado por algún procedimiento empírico, a través de las respuestas de un grupo de sujetos a un conjunto de ítems. Entre los diversos procedimientos para el cálculo del estimador del coeficiente de fiabilidad se utilizó primeramente el coeficiente de Kuder-Richardson para ítems dicotómicos. El cual refleja el grado de variación de los ítems que constituye en el test.

$$r_{tt} = \frac{k}{k-1} * \left[\frac{\sigma^2 - \sum p \cdot q}{\sigma^2} \right] \Rightarrow r_{tt} = \frac{32}{32-1} * \left[\frac{44,911 - 6,878}{44,911} \right] = 0,873$$

Cuando se sospecha que el cuestionario es multidimensional se puede calcular las siguientes razones, basados en los resultados del análisis factorial (Barbero, 2003; Batanero & Díaz 2006):

- El coeficiente Theta que tiene en cuenta los pesos de los ítems en el primer factor (Carmines & Zeller, 1979). Se trata del coeficiente alfa cuando las varianzas verdaderas (suma de las covarianzas) y el total se calculan a partir de las puntuaciones factoriales derivadas del primer factor, antes de las rotaciones (Morales, 1988). En el caso del cuestionario de procesos de resolución de problemas fue bastante alto, debido a que el

primer factor explica porcentajes de la varianza. Viene dado por la siguiente expresión, donde es el primer autovalor en el análisis factorial.

$$\theta = \frac{k}{k-1} * \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) = \frac{32}{32-1} * \left(1 - \frac{1}{7,299}\right) = 0,891$$

- El coeficiente Omega, que en el cuestionario de procesos de resolución de problemas matemáticos cumplió con la relación: $\alpha < \theta < \Omega$ (Heise & Bohrnstedt, 1970). En la expresión que sigue, h_j son las comunales de las variable (correlaciones múltiple de cada una con las demás) y r_{jh} las correlaciones entre pares de variables.

$$\Omega = 1 - \frac{k - \sum h_j^2}{k + 2\sum r_{jh}} = 1 - \frac{32 - 21,226}{32 + (2 * (39,354))} = 0,903$$

6.4.5 Análisis de validez de contenido

La consideración de la validez de contenido consistió en que el instrumento recogiera una muestra representativa de los contenidos evaluados (propiedades de adición y multiplicación, propiedades de orden, proposiciones y funciones proposicionales, ecuaciones de primer grado con una incógnita, resolución algebraica de problemas verbales) y su relación con los procesos matemáticos (pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, representar, plantear y resolver problemas) que se desearon estudiar, esta relación se puede observar en la tabla 6.6.

Tabla 6.6: Relación entre el contenido evaluado y los procesos matemáticos

Nº	Contenidos Evaluados	Procesos Matemáticos					
		Pensar y razonar	Argumentar y justificar	Comunicar	Modelar	Plantear y resolver problemas	Representar
1	Realizar cálculo sencillos que incluya propiedades aditivas de los números reales.						x
2	Realizar cálculo sencillos que incluya propiedades multiplicativas de los números reales.						x
3	Utilizar y aplicar definiciones básica sobre figuras geométricas						x
4	Sustituir correctamente los números para aplicar un algoritmo numérico o fórmula algebraica sencilla.	x					

Nº	Contenidos Evaluados	Procesos Matemáticos					
		Pensar y razonar	Argumentar y justificar	Comunicar	Modelar	Plantear y resolver problemas	Representar
5	Realizar cálculos sencillos que incluyan las operaciones aditivas.						x
6	Realizar cálculos sencillos que implican relaciones entre dos variables conocidas	x					
7	Utilizar una representación bidimensional dada para contar o calcular elementos de un objeto.	x					
8	Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero					x	
9	Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero			x			
10	Interpretar y aplicar formulas verbales y manejar y utilizar formulas lineales que represente relaciones del mundo real.			x			
11	Realizar cálculos sencillos que implican operaciones aditivas.						x
12	Interpretar el lenguaje algebraico en los cuales se oculte algún algoritmo sencillo y aplicar dicho algoritmo.						x
13	Sustituir correctamente los números para explicar la relaciones entre dos variables desconocidas.			x			
14	Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.						x
15	Interpretar las relaciones entre dos variables a través de la sustitución de un número conocido.			x			
16	Llevar a cabo cálculos explícitamente descritos que comprenden procesos secuenciales.	x					
17	Utilizar los datos relevantes de la descripción de una situación compleja y realizar los cálculos correspondientes.					x	
18	Aplicar algoritmos rutinarios para resolver problemas geométricos.			x			
19	Aplicar algoritmos rutinarios para resolver problemas geométricos						x
20	Utilizar los datos relevantes de la descripción de una situación compleja y realizar los cálculos correspondientes.	x					

Nº	Contenidos Evaluados	Procesos Matemáticos					
		Pensar y razonar	Argumentar y justificar	Comunicar	Modelar	Plantear y resolver problemas	Representar
21	Interpretar el lenguaje algebraico en los cuales se oculte algún algoritmo sencillo y aplicar dicho algoritmo.						x
22	Interpretar representaciones complejas para resolver un problema práctico.		x				
23	Utilizar representaciones múltiples para resolver un problema práctico, es decir, interpretar y comprender significados.				x		
24	Analizar un modelo matemático dado que implique una formula compleja.						x
25	Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones			x			
26	Reflexionar sobre la relación entre una fórmula algebraica y los datos subyacentes.				x		
27	Realizar cálculos sencillos que implican relaciones entre una variable conocida. Situación algebraica en contexto de la propiedad conmutativa.	x					
28	Usar comprensivamente el álgebra para resolver problemas; capacidad de manejar expresiones algebraicas para traducir una situación del mundo real.					x	
29	Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.						x
30	Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.	x					
31	Reflexionar, interpretar y explicar información matemática compleja en el contexto de una situación real desconocida.		x				
32	Aplicar la comprensión geométrica profunda para trabajar con patrones complejos y generalizados.					x	

Fuente: Elaboración propia.

La relación entre el contenido evaluado y los procesos matemáticos permitió una planificación cuidadosa de los ítems que se incluyeron en el estudio y así mismo se planteó cómo éstos pueden contribuir a la medida del constructo subyacente.

6.4.6 Análisis de validez de constructo

Se aplicó la técnica multivariante del análisis factorial exploratorio, para reducir, estandarizar y validar la información recogida en el cuestionario aplicado a los estudiantes universitarios. El análisis factorial se ha llevado a cabo según el método de componentes principales (PrC). Y posteriormente, se ha aplicado la rotación Varimax (máxima varianza) con normalización de Kaiser. A continuación, se presentan los resultados.

Tabla 6.7: Resumen estadístico del análisis factorial del cuestionario cognitivo

Medida de Adecuación Muestral		Kaiser-Meyer-Olkin	0,531
Prueba de Esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	975,123	
	Gl	496	
	Sig.	0,000	
Varianza Explicada Total	%	62%	
Fiabilidad	Kuder-Richardson	0,873	
	Heise-Bohrnstedt,	0,891	
	Carmines-Zeller	0,903	
Cantidad de Niveles		6	
Cantidad de ítems		32	

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 6.8, se resumen las estadísticas de la solución factorial definitiva, después de la rotación, se puede observar que la solución definitiva del análisis factorial contiene 6 niveles con 32 de los ítems originalmente utilizados, los cuales explican un porcentaje de la varianza de 66,326%, aunque esta es muy baja. La prueba de esfericidad de Bartlett nos confirma la existencia de factores subyacentes en la matriz de datos (Tabla 6.7).

Tabla 6.8: Resumen factorial de los niveles de complejidad

Niveles	k	Total	% Total de la Varianza	% Acumulado
Nivel 1	8	7,299	22,808	22,808
Nivel 2	7	4,215	13,173	35,982
Nivel 3	6	3,337	10,429	46,411

Niveles	k	Total	% Total de la Varianza	% Acumulado
Nivel 4	3	2,574	8,043	54,454
Nivel 5	3	2,008	6,274	60,728
Nivel 6	5	1,791	5,598	66,326

Fuente: Elaboración propia.

Como puede observarse en la tabla 6.8, los tres primeros niveles son los que más varianza explican, sólo entre ellos se alcanza el 46,411% de la varianza explicada; sin embargo, los otros tres factores también explican un porcentaje nada despreciable de un 19,915% entre ellos. Por otra parte, los niveles de complejidad de resolución de problemas matemáticos se asocian con los procesos matemáticos como: razonar y pensar, argumentar y justificar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, y representar, véase esta asociación en la tabla 6.9.

Tabla 6.9: Relación entre niveles de resolución de problemas matemáticos y los procesos matemáticos

Niveles de complejidad de resolución de problemas matemáticos	Pensar y razonar	Argumentar y justificar	Comunicar	Modelar	Plantear y resolver problemas	Representar
Nivel 1 de complejidad de resolución de problemas	x				x	
Nivel 2 de complejidad de resolución de problemas			x			x
Nivel 3 de complejidad de resolución de problemas	x	x	x		x	x
Nivel 4 de complejidad de resolución de problemas		x		x		x
Nivel 5 de complejidad de resolución de problemas	x		x	x		
Nivel 6 de complejidad de resolución de problemas	x	x			x	x

Fuente: Elaboración propia.

A continuación se presenta la solución factorial rotada, obsérvese la tabla 6.10.

Tabla 6.10: Solución factorial rotada

k	N1	N2	N3	N4	N5	N6
I7	0,415	0,074	0,045	0,028	-0,007	-0,041
I8	0,437	0,005	0,087	0,050	-0,057	0,032
I5	0,530	0,024	-0,001	0,006	0,173	0,066
I6	0,937	0,008	0,071	0,057	0,060	0,049
I4	0,965	0,069	0,091	0,001	0,386	0,169
I1	0,933	0,105	0,097	0,111	-0,044	0,119

k	N1	N2	N3	N4	N5	N6
I2	0,930	0,028	0,333	0,236	-0,326	0,311
I3	0,409	0,149	0,195	0,371	-0,536	0,088
I15	0,149	0,437	0,195	0,371	-0,536	0,088
I14	0,005	0,930	0,087	0,050	-0,057	0,032
I12	0,085	0,776	-0,046	0,107	0,070	0,112
I13	0,074	0,933	0,045	0,028	-0,007	-0,041
I11	0,105	0,555	0,261	-0,052	0,203	0,077
I10	0,085	0,570	0,059	0,168	0,165	0,353
I9	0,134	0,318	0,025	0,235	-0,001	0,067
I20	0,071	0,008	0,965	0,057	0,060	0,049
I18	-0,039	-0,023	0,671	0,062	0,207	0,051
I21	0,114	0,186	0,830	0,126	0,194	0,185
I19	0,063	0,019	0,877	0,089	-0,101	0,125
I17	0,071	0,008	0,965	0,057	0,060	0,049
I16	0,208	-0,163	0,275	0,113	0,212	0,041
I24	0,057	0,008	0,071	0,965	0,060	0,049
I22	0,173	0,105	0,111	0,937	-0,044	0,119
I23	0,085	0,070	-0,046	0,776	0,107	0,112
I26	-0,017	0,192	0,432	0,169	0,435	-0,432
I25	0,042	0,302	0,227	-0,080	0,444	0,123
I27	0,143	-0,380	-0,039	-0,337	0,221	-0,113
I29	0,173	0,105	0,119	0,111	-0,044	0,937
I30	0,063	0,019	0,089	0,125	-0,101	0,877
I28	0,114	0,186	0,185	0,126	0,194	0,830
I31	-0,055	0,017	0,081	-0,091	0,237	0,311
I32	0,069	0,278	-0,380	0,476	0,190	0,374

Fuente: Elaboración propia.

Algo importante a mencionar, es que los ítems I5, I15, I27 e I32, se han incluido en niveles de complejidad de resolución de problemas matemáticos distintos a los que indicaría el mayor peso factorial, por su relación con el contenido que trata de evaluar el cuestionario. Es decir, el ítem I5, aunque pesa ligeramente más en el nivel 5, se ha incluido en el nivel 1; igualmente, con el ítem I15, pesa más en el nivel 5, se agregó en el nivel 2; el

ítem I27 pesa más en el nivel 2 y se incluyó en el nivel 5, y finalmente el ítem I32, pesa más en el nivel 4, y se incorporó en el nivel 6.

En este sentido, los descriptores de los niveles establecidos se basan en la configuración de los procesos de resolución de problemas en un contexto algebraico compuesto por un ciclo de seis subprocesos: Nivel 1 (definido en el primer factor), Nivel 2 (constituye el segundo factor), Nivel 3 (que está definido por el tercer factor), Nivel 4 (cuyos ítems satura el cuarto factor), Nivel 5 (definido en el quinto factor) y finalmente el Nivel 6 (que constituye el sexto factor).

- El primer factor, que explica el 22,808% de la varianza, comprende 8 ítems. En este factor se incluyen ítems en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas, es decir instrucciones directas en situaciones explícitas.
- El segundo, que describe el 13,173% de la varianza, compuesto por 7 ítems. Los ítems en este factor atributan a crear y expresar argumentos matemáticos a partir de algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales.
- El tercer factor, que significa el 10,429% de la varianza, comprende 6 ítems, este factor contienen ítems con representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas.
- El cuarto factor, que representa el 8,043% de la varianza, está constituido por 3 ítems, estos enunciados hacen referencia a interpretar y trabajar con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuesto.
- El quinto factor, que simboliza el 6,274% de la varianza, está formado por 3 ítems. En este factor los ítems incluyen situaciones reales o estructuras matemáticas que abordan problemas complejos relativos a estos modelos, es decir, representaciones adecuadas, relacionadas y caracterizadas en situaciones complejas.
- El sexto factor, que figura el 5,598% de la varianza, está representado por 5 ítems. Este factor contiene ítems con proposiciones y expresiones con símbolos y fórmulas utilizadas para realizar cálculos asociados a modelos de situaciones de problemas complejos.

6.4.7 Análisis de la puntuación global

Con el fin de determinar el efecto sobre la puntuación total en la prueba de los factores especialidad y género en que fue aplicada, se ha realizado un análisis de la varianza para determinar qué factores tienen un efecto estadísticamente significativo sobre la puntuación total (variable dependiente, puntuación total). La tabla 6.11 muestra la media de la puntuación total para cada uno de los niveles de los factores. También muestra los errores estándar de cada media, los cuales son una medida de la variabilidad en su muestreo. Las dos columnas de la derecha muestran intervalos de confianza del 95% para cada una de las medias:

Tabla 6.11: Medias por mínimos cuadrado en la puntuación total del cuestionario cognitivo

Nivel	Casos	Media	Error Est.	Límite Inferior	Límite Superior
Media Global	80	17,486			
Especialidad					
Informática Administrativa	39	18,777	1,057	16,671	20,882
Ingeniería Agroforestal	41	16,196	1,107	13,991	18,400
Género					
Mujeres	31	16,058	1,215	13,638	18,479
Hombres	49	18,914	0,964	16,994	20,833

Fuente: Elaboración propia.

A partir del modelo de Dunn y Clarck (1987) para el análisis de varianza multifactorial de efectos fijos, hemos obtenido los componentes de la varianza (Tabla 6.12). De esta tabla obtenemos los cuadrados medios entre sujetos para cada uno de los factores y residual, así como sus grados de libertad. No se ha evaluado la significación de las interacciones entre los factores. La prueba-F en la tabla ANOVA permiten identificar los factores significativos.

Tabla 6.12: Análisis de varianza para la puntuación total del cuestionario cognitivo

Fuente	Suma de Cuadros	GI	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Efectos Principales					
Especialidad	120,985	1	120,985	2,78	0,0993
Género	140,69	1	140,69	3,24	0,0759
Residuos	3346,76	77	43,4644		
Total (corregido)	3547,95	79			

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 6.12 (ANOVA) se descompone la variabilidad de la puntuación total en contribuciones debidas a los factores considerados. Los valores-P indican la probabilidad de obtener un valor F tan extremo o más que el observado para cada uno de los factores. En nuestro caso no encontramos diferencias estadísticamente significativas entre los factores. Puesto que ningún valor-P es menor que 0,05, ninguno de los factores tiene efecto estadísticamente significativo sobre la puntuación total con un 95% de nivel de confianza. Por tanto, se acepta la hipótesis de igualdad de puntuación media entre los factores.

La prueba T de muestras independientes ratifica los resultados de la prueba de ANOVA, véase la tabla 6.13. En definitiva, se acepta que tanto hombres y mujeres que provienen de las especialidades en Informática Administrativa e Ingeniería Agroforestal parecen tener el mismo dominio de los procesos matemáticos para resolver situaciones-problemas en un contexto algebraico.

Tabla 6.13: Prueba T para muestra independientes en la puntuación total del cuestionario cognitivo

		Prueba de Levene de calidad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
		F	Sig.	t	gl	Sig.	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
									Inferior	Superior
Especialidad	Varianzas iguales	1,399	0,240	1,163	78	0,248	1,740	1,496	-1,238	4,717
	Varianzas desiguales			1,167	77	0,247	1,740	1,491	-1,229	4,709
Género	Varianzas iguales	0,059	0,809	-1,343	78	0,183	-2,055	1,530	-5,102	0,991
	Varianzas desiguales			-1,333	62	0,187	-2,055	1,542	-5,137	1,027

Fuente: Elaboración propia.

6.5 CONCLUSIONES

Las conclusiones que se presentan en este capítulo se hacen a partir de la noción de idoneidad didáctica. La idoneidad didáctica de un proceso de evaluación, se define como la articulación coherente y sistémica de los criterios de idoneidad siguiente (Godino, 2011):

- La idoneidad cognitiva de un instrumento es el grado de dificultad que representan los ítems de dicho instrumento, es decir, el grado de representatividad de los significados evaluados respecto a los significados personales. En nuestro estudio los resultados ponen de manifiesto que el grado de dificultad del instrumento es variada y medio-alta, puesto que los índices van de una dificultad difícil hasta una dificultad muy fácil, no hay ítem con dificultad muy difícil (índices inferiores al 25%).

- La idoneidad evaluadora de un instrumento es el índice de discriminación de un ítem en el instrumento. Un ítem puede ser adecuado cognitivamente, pero no diferenciar (por ser demasiado fácil) los estudiantes que tienen un mayor o menor conocimiento del concepto. El índice de discriminación encontrado hacía referencia que los ítems poseen una buena correlación. Esta idoneidad es un componente de la idoneidad instruccional en cuanto que uno de los objetivos de la instrucción es la función evaluadora (Godino, 2011).
- La idoneidad evaluadora también se explica en términos de la fiabilidad de los ítems ya que la fiabilidad determina la medida de estabilidad del instrumento en cuanto al significado de objeto de la evaluación. Los resultados del análisis de fiabilidad del instrumento alfa-theta-omega revelan que el instrumento en general es confiable para evaluar los procesos de resolución de problemas matemáticos en un contexto algebraico.
- La idoneidad epistémica se refleja en la validez del contenido del instrumento, es decir, es el grado de representatividad del instrumento en cuanto al significado objeto de la evaluación. Los resultados de validez de contenido sitúan una buena relación de los contenidos evaluados con los procesos matemáticos que se exteriorizan en contextos algebraicos.
- La idoneidad mediacional es el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. En nuestro caso, se refleja en la validez de constructo donde se configura los procesos matemáticos en términos de niveles de complejidad en la resolución de problemas en contexto algebraico.
- La idoneidad ecológica se explica en la validez de contenido, es decir, el grado en que el instrumento se ajusta al contexto del álgebra en que los estudiantes se desarrollan.

En definitiva, la interrelación de las distintas facetas que intervienen en el diseño, implementación y evaluación de procesos matemáticos se explica, primer lugar, en términos de la faceta epistémica y ecológica que generan un sistemas de indicadores asociados a la teoría curricular; en segundo lugar, la faceta cognitiva constituye una teoría de aprendizaje de los procesos matemáticos, y finalmente, las facetas interaccional y mediacional contienen, a su vez, el germen de una teoría de la enseñanza. Partiendo de esto, contestamos la premisa de que un instrumento de evaluación tiene como finalidad proporcionar información sobre los significados personales de un grupo de estudiantes sobre un objeto o un grupo de objetos matemáticos dados.

CAPÍTULO 7:

ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA FACTORIAL DE UNA ESCALA DE ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS

“Aunque no podemos medir directamente la inteligencia, la motivación, el estrés, etc., nos valemos de indicadores del comportamiento a medir. En este sentido, un indicador es un instrumento que pone de manifiesto alguna característica no observable” (Bisquerra, 1989, p. 89). “Nunca se mide una cosa: lo medible es exclusivamente alguna propiedad de la cosa” (Bunge, 1976, p. 802).

7.1 INTRODUCCIÓN

Las escalas son instrumento para determinar el grado o frecuencia con que se da una característica, rasgo o conducta. Por lo general, una escala consta de una serie de ítems y un conjunto de categorías que representan el grado de variación de las características, rasgo o conducta que representa el ítem (Gil, 2011). A la hora de clasificar las escalas se pueden utilizar diferentes criterios, no obstante, los más generales atienden al número de dimensiones de la escala y la entidad a escalar. Según el número de dimensiones de las escalas se tienen: el escalamiento unidimensional que posiciona los diferentes objetos en una única dimensión; el escalamiento multidimensional que posiciona los objetos en dos o más dimensiones simultáneamente.

Una de las diferentes escalas que existen son las escalas de actitudes. Dichos instrumentos de medida intentan medir la actitud de los sujetos a través de la valoración que cada uno asigna a cada ítem que compone la escala. Tradicionalmente se suelen distinguir tres tipos de escala de actitud: escalas diferenciales, escalas sumativas y acumulativas:

Tabla 7.1: Clasificación de las escalas

Escalas diferenciales	Escalas Sumativas	Escalas Acumulativas
Los ítems se analizan y seleccionan para cubrir todo el espectro de la variable que se desea medir, y cada uno de ellos tiene un peso distinto y, por lo tanto, las mismas respuestas a ítems diferentes tienen un peso distinto en la puntuación final. En la aplicación de la escala, los sujetos se limitan a señalar las afirmaciones con las que están de acuerdo. Entre las dificultades que presentan este tipo de escala está lo complicado de su construcción. Otro inconveniente que presenta es la posibilidad de que dos personas tengan la misma puntuación habiendo contestado de forma distinta.	Los ítems no se escogen para cubrir el espectro, sino en función de su relación comprobada con todos los demás, es decir, su poder de discriminación, y tienden a estar en los extremos del continuo. Además, todos los ítems tienen el mismo valor y las mismas respuestas que se dan a ítems diferentes valen igual. Los sujetos responden indicando su agrado de acuerdo o desacuerdo con el ítem; en otras palabras, aportan su juicio de valor del ítem. Cada sujeto tiene como puntuación global la suma de las puntuaciones asignadas a cada ítem. Por eso se llama escala sumativa. Presenta el inconveniente de que diferentes combinaciones de puntuaciones pueden dar el mismo resultado final.	Los ítems deben medir lo mismo, aunque en grados distintos de intensidad. Son escalas con muy pocos ítems (cinco a seis), de confección laboriosa y útiles para medir objetivos muy limitados. Son escalas unidimensionales.

Elaboración: Gil (2011)

Desde el panorama de las escalas de actitud, Gómez-Chacón (2009) define a la actitud como una predisposición evaluativa de conducta que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento, y que consta de una componente cognitiva, una componente afectiva y una componente intencional. Entonces, se puede hacer referencias a instrumentos para medir actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas. Las primeras se ven más afectadas por la componente afectiva y las segundas, por la cognitiva

(NCTM, 2000). De esta forma, Gil, Blanco y Guerrero (2005) expresan que la aparición de las actitudes hacia las Matemáticas está relacionada con los éxitos o fracasos en el aprendizaje de las matemáticas, de ahí que se considere importante el estudio de las experiencias del sujeto durante su formación en esta área, ya que sus creencias y emociones hacia dicha disciplina influirán en el logro no sólo en el ámbito académico, sino también en el laboral. Asimismo, en los resultados de la OECD (2004), se encontró que únicamente el 38% del estudiantado manifestó un interés y gusto por esta disciplina; el 66% afirmó que esta asignatura es importante porque la necesita para lo que quiere estudiar más adelante; mientras que el 57% reconoció que le desagradan las matemáticas, unido a que manifestó no comprenderla cabalmente. Por último, un 55% demostró tener ansiedad y preocupación cuando se resuelven actividades matemáticas.

Señalado todo esto, el propósito del trabajo realizado que se presenta en este capítulo ha sido adaptar, validar y confirmar la estructura factorial de la escala de actitud hacia las matemáticas de Auzmendi (1992). Por tales razones, se presentan aspectos sobre la perspectiva de la evaluación de las actitudes hacia las matemáticas, la descripción del instrumento y el proceso de análisis de la estructura factorial de dicha escala.

7.2 PERSPECTIVAS DE LA EVALUACIÓN DE LAS ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS

En el mundo de las matemáticas se ha usado el concepto de actitud, con una definición menos clara que en la psicología, como una predisposición, con cierta carga emocional, que influye en la conducta del ser humano; definición que remarca tres componentes básicos de la actitud: la cognición o creencias sobre el objeto actitud, el afecto o carga evaluativa de dichas creencias y una intención de conducta en relación a dicha actitud (Gil, Blanco, & Guerrero, 2005).

En relación a las matemáticas, cabe distinguir, como ya se ha señalado en el capítulo 4, entre actitudes matemáticas y actitudes hacia las matemáticas. La actitud hacia las matemáticas tendría que ver con la valoración, el aprecio, la satisfacción, la curiosidad y el interés tanto por la disciplina como por su aprendizaje, acentuando más el componente afectivo que el cognitivo (Martínez, 2008). Las actitudes matemáticas, por el contrario, tendrían que ver con el modo de utilizar capacidades generales como la flexibilidad de pensamiento, apertura mental, el espíritu crítico, la objetividad, etc., que son importantes en el trabajo en matemáticas (Gómez-Chacón, 2009).

En relación con las actitudes hacia las matemáticas, es muy conocida la importancia que tienen dichas actitudes en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en concreto, sobre el rendimiento matemático de los estudiantes (Miranda, 2012). Del mismo modo, está ampliamente constatada la influencia positiva que las actitudes hacia las matemáticas tienen sobre la ansiedad (Akin & Kurbanoglu, 2011). Investigaciones al respecto han encontrado que los estudiantes con mejores actitudes hacia las matemáticas tienen más altas percepciones de la utilidad de las matemáticas, muestran motivaciones intrínsecas relacionadas con su estudio (Perry, 2011), poseen mayor confianza en el aprendizaje de las matemáticas (McLeod, 1992) así como mejor auto-concepto matemático (Hidalgo, Morato, & Palacios, 2005) y, sobre todo, muestran conductas de acercamiento a esta materia (Fennema & Sherman, 1976). Probablemente debido a su importancia, los intentos de medir las actitudes hacia las matemáticas surgen de forma temprana en el tiempo siendo los trabajos de Aiken (Aiken, 1972; 1974; 1979; Aiken & Dreger, 1961), junto con las aportaciones de Dutton y Blum (1968), pioneros en el tema que nos ocupa.

Aiken y Dreger (1961) desarrollan el primer instrumento de medida de estas actitudes; dicho cuestionario está compuesto por 20 ítems con dos subescalas: Agrado y Miedo hacia las Matemáticas. Dado que ambas dimensiones pueden considerarse como dos polos de un mismo continuo, algunos autores la han considerado como una escala unidimensional (Auzmendi, 1992). En Aiken (1972) se introduce el factor disfrute de las matemáticas; dos años después este mismo autor (Aiken, 1974) presenta la que es, sin duda, una de las escalas estándar en la medida de actitudes hacia las matemáticas compuesta de dos subescalas: escala de valor de las matemáticas y escala de disfrute de las matemáticas. Sin embargo, Aiken en el año 1979, aumenta el número de factores hasta un total de cuatro: gusto por las matemáticas, motivación matemática, valor-utilidad de las matemáticas y miedo a las matemáticas. Las adaptaciones y validaciones de estas escalas de Aiken (1974; 1979) han sido numerosas y coincidentes en los valores de fiabilidad originales y la estructuración factorial de las cuatro subescalas mencionadas.

La escala de Fennema y Sherman (1976), es, en palabras de Palacios, Arias y Arias (2014), la más popular de las medidas de las actitudes hacia las matemáticas de las últimas tres décadas. El origen de esta escala es el estudio de las diferencias entre hombres y mujeres en sus actitudes hacia las matemáticas, así como su influencia con el rendimiento. Esta escala ha sido objeto de amplios estudios de replicación, traducida a diferentes lenguas y modificada para ser aplicada a diferentes situaciones. La contribución de Tapia y Marsh (2004) denominada inventario de actitudes hacia las matemáticas es, sin duda, uno de los instrumentos más utilizados en la medida de las actitudes hacia las matemáticas. Su versión final consta de 49 ítems que aspiran valorar seis aspectos de dichas actitudes: confianza-autoconcepto, ansiedad, utilidad-valor de las matemáticas, gusto por las matemáticas,

motivación y expectativas de los padres y profesores (Palacios, Arias, & Arias, 2014). Entre las aportaciones más recientes cabe resaltar el trabajo de Adelson y McCoach (2011) quienes han elaborado una escala de actitudes hacia las matemáticas para estudiantes de primaria en cuyos análisis preliminares, presenta dos factores relacionados con la percepción de eficacia y el gusto por las matemáticas.

Las adaptaciones y validaciones a la lengua castellana tanto de la escala de Aiken (1974), como de la de Fennema y Sherman (1976), así como la posterior de Tapia y Marsh (2004) son escasas y, generalmente, orientadas a objetivos distintos que el análisis psicométrico propiamente dicho. Tal es el caso de la adecuación de Cazorla, Silva y Brito (1999) de la escala de Aiken (1974) orientada al estudio de las actitudes hacia la estadística, la de Quiles (1993) en un intento de relacionar las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento escolar, la más moderna de Estrada y Díez-Palomar (2011) centrada en la educación matemática de familiares o la de González-Pineda, Fernández-Cueli, García, Suárez, Fernández, Tuero-Herrero y Silva (2012) con el propósito de determinar las diferencias en las actitudes matemáticas entre hombres y mujeres. En las primeras investigaciones de Gairín (1990) se señala la falta de adaptación de escalas de actitud hacia las matemáticas y estadísticas en lengua castellana y, más recientemente Muñoz y Mato (2008) hacen eco de esta inexistencia de adaptaciones de estas escalas en nuestro contexto.

Esto pone de manifiesto que las adaptaciones de las escalas de actitudes hacia las matemáticas y estadística, en lengua castellana, se inicia con Gairín (1990). En esta investigación, el autor destaca la necesidad de contar con un instrumento de medida de actitudes hacia las matemáticas en lenguaje castellano dado que todos los conocidos hasta la fecha provenían del mundo anglosajón. El autor construyó una escala verbal compuesta por 22 ítems medidos con una escala tipo Likert de tres dimensiones relacionadas con: el gusto por las matemáticas, la utilidad de las matemáticas y la confianza-ansiedad hacia las matemáticas. El índice de fiabilidad de estos tres factores, obtenidos mediante la técnica del test-retest, oscilan entre 0,77 y 0,93, siendo 0,84 la fiabilidad de la escala en su conjunto (Palacios, Arias, & Arias, 2014).

Por su parte, Auzmendi (1992) elaboró una de las escalas de actitudes hacia las matemáticas más citada de las realizadas en lengua castellana. La autora justifica la construcción de una nueva escala en la ausencia de este tipo de instrumento elaborado en lengua castellana e hispanoamericana. La prueba final consta de 25 ítems que, tras los análisis factoriales correspondientes, presenta cinco componentes o factores principales: sentimiento de ansiedad y temor que el estudiante manifiesta hacia las matemáticas, agrado-gusto por las matemáticas, utilidad de las matemáticas, motivación y confianza. La fiabilidad de los factores oscila entre 0,91 para el factor ansiedad, y 0,49 para el factor de confianza. La

muestra de validación estuvo compuesta por 1221 estudiantes de secundaria y bachillerato. Es importante, también, señalar las aportaciones de Bazán y Sotero (1998) quienes elaboraron una escala compuesta por 31 ítems, dividida en cuatro dimensiones: afectividad, aplicabilidad, fiabilidad y ansiedad. La escala está orientada a la medida de las actitudes de estudiantes recién ingresado en la universidad. La fiabilidad de la escala total presentó un valor de 0,90. Para su cálculo se utilizó una muestra de 256 estudiante universitarios.

En los últimos años, Muñoz y Mato (2008) presentaron una escala de actitudes hacia las matemáticas construida con una muestra de 1220 estudiantes de educación secundaria. La prueba final del cuestionario consta de 19 ítems que, tras el análisis factorial correspondiente, presenta dos únicos factores: actitud del profesor percibida por el estudiante y agrado-utilidad de las matemáticas. La versión final obtuvo una fiabilidad de 0,97. Por último, hay que señalar la contribución de Alemany y Lara (2010) quienes diseñaron y validaron una nueva escala de actitudes hacia las matemáticas para estudiantes de secundaria compuesta por 37 ítems. Un elemento diferenciador de este trabajo es que la muestra de validación está formada por estudiantes de origen étnico berebere y elaborada tanto en lengua castellana como en lengua tamazigh. Con la versión final obtuvieron una consistencia interna de 0,92 en una muestra de 236 estudiantes de segundo y tercero de educación secundaria.

Con independencia de lo anterior, los diferentes trabajos han reportado resultados concluyentes respecto a las dimensiones o factores (ansiedad, utilidad, agrado, confianza y motivación) asociados a las matemáticas, por lo que es deseable el análisis, la validación y la confirmación de la estructura factorial de la escala de actitud hacia las matemáticas en población distinta a la europea y norteamericana. En este sentido, se ha elegido la escala de actitudes hacia las matemáticas de Auzmendi (1992), debido a su proximidad a nuestra situación de partida: estudiantes inmersos en cursos de formación de profesores en la Universidad.

7.3 DESCRIPCIÓN DEL INSTRUMENTO

Entre todos los instrumentos de medida se utilizó, por tanto, la escala de actitudes hacia las matemáticas de Auzmendi (1992), porque define cinco factores dimensionales que miden: la ansiedad, este factor se refiere al sentimiento de ansiedad, temor que el estudiante manifiesta ante la materia de matemáticas; el agrado, hace referencia al aspecto de agrado o disfrute que provoca el trabajo matemático; la utilidad, se puntualiza al valor que el estudiante otorga a las matemáticas, la utilidad que el estudiante percibe que puede tener esta materia para su futura vida profesional; la motivación, este factor puede interpretarse como

la motivación que siente el estudiante hacia el estudio y utilización de las matemáticas; y la confianza, o el sentimiento de confianza que provoca la habilidad matemática. Así mismo, los 5 factores se constituyen en 25 ítems que estudian aspectos variados de los afectos hacia las matemáticas. (Véase en el apartado anexo 2, el instrumento).

Tabla 7.2: Factores e ítems de la escala de actitud hacia las matemáticas en la validación

Factores	Ítems
Ansiedad	• La asignatura de matemáticas se me da bastante mal. • Estudiar o trabajar con las matemáticas no me asusta en absoluto. • Las matemáticas es una de las asignaturas que más temo. • Tengo confianza en mí mismo/a cuando me enfrento a un problema de matemáticas. • Cuando me enfrento a un problema de matemáticas me siento incapaz de pensar con claridad. • Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando me enfrento a un problema de matemáticas. • Trabajar con las matemáticas hace que me sienta nervioso/a. • No me altero cuando tengo que trabajar en problemas de matemáticas. • Las matemáticas hacen que me sienta incómodo/a y nervioso/a.
Agrado	• Utilizar las matemáticas es una diversión. • Me divierte el hablar con otros de matemáticas. • Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí. • Si tuviera oportunidad me inscribiría en más cursos de matemáticas de los que son obligatorios.
Utilidad	• Considero las matemáticas como una materia muy necesaria en mis estudios. • Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas. • Espero tener que utilizar poco las matemáticas en mi vida profesional. • Considero que existen otras asignaturas más importantes que las matemáticas para mi futura profesión. • Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las matemáticas. • Para mi futuro profesional la matemática es una de las asignaturas más importantes que tengo que estudiar.
Motivación	• La matemática es demasiado teórica para que pueda servirme de algo. • Las matemáticas pueden ser útiles para el que decida realizar una carrera de “ciencias”, pero no para el resto de los estudiantes. • La materia que se imparte en las clases de matemáticas es muy poco interesante.
Confianza	• Tener buenos conocimientos de matemáticas incrementará mis posibilidades de trabajo. • Me provoca una gran satisfacción el llegar a resolver problemas de matemáticas. • Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las matemáticas.

Fuente: Auzmendi (1992).

En todos los ítems las respuestas posibles oscilan del 1 al 5, escala tipo Likert, desde fuertemente en desacuerdo hasta fuertemente de acuerdo. Los ítems no se contabilizan con el número que constituye su respuesta, sino que para algunos totalmente en desacuerdo se mide con un 5 y para otras con un 1 (Auzmendi, 1992). La escala de actitud hacia las

matemáticas permite obtener, además de una puntuación global sobre las actitudes, cinco puntuaciones más referidas a cada uno de los aspectos que se evalúan: ansiedad, agrado, utilidad, motivación y confianza. En este sentido, se codificaron todas las respuestas de modo que una puntuación más alta signifique actitudes positivas en todos los aspectos. Por tanto, los códigos correspondientes a los 25 ítems son los siguientes:

Tabla 7.3: Criterios de corrección de los ítems de la escala de actitud hacia las matemáticas

Criterios de Corrección los ítems	FD	NA	I	DA	FA
Los ítems 2, 5, 7, 10, 12, 15, 16, 17, 22, 25. Poseen el siguiente código	5	4	3	2	1
Los ítems 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 23, 24. Poseen el siguiente código.	1	2	3	4	5

Fuente: Auzmendi (1992).

7.4 PROCESO DE ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA FACTORIAL DE LA ESCALA DE ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS

El proceso de análisis de la estructura factorial de la escala de actitud hacia las matemáticas de Auzmendi (1992) se efectuó usando los análisis siguientes: un análisis exploratorio y el índice de homogeneidad corregido entre ítem y las puntuaciones totales en la escala; un análisis de fiabilidad de la escala se empleó el índice de alfa de Cronbach; la validez de constructo se analizó mediante el análisis factorial de componentes principales utilizando rotación Varimax: previamente se realizaron el test de esfericidad de Bartlett y el test de Kaiser, Meyer y Olkin (KMO), para comprobar la viabilidad del análisis; la comparación entre las medias en las puntuaciones en la escala se examinaron a través del análisis de varianza; se comprobó la distribución normal de los resultados del cuestionario mediante la prueba de Kolmogorov-Smirnov; e igualmente se aplicó la prueba T para muestras independientes y el análisis de varianza de un factor con el propósito de determinar entre qué grupos se daban las diferencias estadísticamente significativas.

7.4.1 Participantes

El estudio se llevó a cabo con una muestra de 182 estudiantes de seis Grados en Ciencias de la Educación (Biología, Inglés, Español, Historia, Pedagogía, Cultura Física) de la Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense pertenecientes a comunidades de la Costa Caribe de Nicaragua. La selección de las especialidades se realizó mediante un muestreo por conveniencia, es decir, por la accesibilidad y proximidad de los sujetos, al investigador. La edad media de los participantes fue de 21 años, con un rango de

edad comprendido entre los 16 y los 24 años. La distribución por especialidad se resume en la tabla 7.4. El 45% de los participantes fueron hombres y el 55% restante fueron mujeres.

Tabla 7.4: Distribución por especialidad en la adaptación de la escala

Especialidad		Hombres	Mujeres	Total	%
Validos	Biología	10	15	25	13,7
	Inglés	26	10	36	19,8
	Español	6	23	29	15,9
	Historia	13	22	35	19,2
	Pedagogía	9	26	35	19,2
	Cultura Física	17	5	22	12,1
	Total	81	101	182	100%
	%	45	55		

Fuente: Elaboración propia.

La administración del instrumento se realizó por parte de los autores durante el curso académico 2013-2014. Tenían un carácter anónimo y fueron complementados por los sujetos de la muestra en presencia del profesor. Con anterioridad a la toma de los datos, se obtuvo tanto el consentimiento informado de los estudiantes, de los profesores como la aprobación de las autoridades de la Universidad.

7.4.2 Análisis exploratorio

En la tabla 7.5, se presentan los estadísticos descriptivos de la escala de actitud hacia las matemáticas para verificar su distribución en la muestra utilizada.

Tabla 7.5: Estadísticos descriptivos de la escala de actitud hacia las matemáticas

No	Enunciado del Ítems	FD	NA	I	DA	FA	$\bar{x}$	σ
1	Considero las matemáticas como una materia muy necesario en mis estudios.	3	6	8	98	67	4,20	0,80
2	La asignatura de matemáticas se me da bastante mal.	14	18	34	74	42	3,61	1,16
3	Estudiar o trabajar con las matemáticas no me asusta en absoluto.	22	30	28	75	27	3,30	1,25
4	Utilizar las matemáticas se me da bastante mal.	27	56	24	59	16	2,89	1,25
5	Las matemáticas son demasiado teóricas para que puedan servirme para algo.	32	37	34	54	25	3,01	1,32
6	Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas.	9	13	21	72	67	3,96	1,10

No	Enunciado del Ítems	FD	NA	I	DA	FA	$\bar{x}$	σ
7	Las matemáticas son una de las asignaturas que más temo.	10	42	38	68	24	3,29	1,12
8	Tengo confianza en mí cuando me enfrento a un problema de matemáticas.	19	26	36	78	23	3,32	1,18
9	Me divierten el hablar con otros de matemáticas.	29	31	31	67	24	3,14	1,30
10	Las matemáticas pueden ser útiles para el que decida realizar una carrera de “ciencias”, pero no para el resto de los estudiantes.	12	33	34	66	37	3,45	1,19
11	Tener buenos conocimientos de matemáticas incrementará mis posibilidades de trabajo.	9	28	16	72	57	3,76	1,18
12	Cuando me enfrento a un problema de matemáticas me siento incapaz de pensar con claridad.	26	37	25	64	30	3,19	1,32
13	Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando me enfrento a un problema de matemáticas.	13	39	33	83	14	3,25	1,09
14	Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí.	29	31	32	64	26	3,14	1,31
15	Espero tener que utilizar poco las matemáticas en mi vida profesional.	26	37	25	64	30	3,19	1,32
16	Considero que existen otras asignaturas más importantes que las matemáticas para mi futura profesión.	32	37	34	54	25	3,01	1,32
17	Trabajar con las matemáticas hacer que me sienta nervioso/a	10	42	38	68	24	3,29	1,12
18	No me altero cuando tengo que trabajar en problemas de matemáticas.	20	34	36	75	17	3,19	1,17
19	Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las matemáticas.	26	46	25	53	32	3,10	1,34
20	Me provoca una gran satisfacción el llegar a resolver problemas de matemáticas	27	27	19	62	47	3,41	1,39
21	Para mi futuro las matemáticas son una de las asignaturas más importantes que tengo que estudiar.	20	37	24	54	47	3,39	1,35
22	Las matemáticas hacen que me sienta incómodo/a y nervioso/a	12	33	34	66	37	3,45	1,19
23	Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las matemáticas.	12	17	11	90	52	3,84	1,13
24	Si tuviera oportunidad me inscribiría en más cursos de matemáticas de los que son obligatorios.	22	40	21	66	33	3,26	1,31
25	Los contenidos que se imparte en las clases de matemáticas son muy poco interesante.	14	18	34	74	42	3,61	1,16

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede apreciar, las puntuaciones medias entre los ítems se encuentran en un intervalo de 2,89 a 4,20, siendo el ítem 4 el que muestra menor puntuación y el ítem 1 una mayor puntuación. La desviación estándar entre los ítems tiene una frecuencia desde 0,89 a 1,39, concurriendo el ítem 1 con menor desviación y el ítem 20 con mayor desviación.

7.4.3 Análisis del índice de homogeneidad

En la tabla 7.6, se presenta el índice de discriminación o homogeneidad (IH) de los 25 ítems que estructuran la escala, para ello se realizó el siguiente procedimiento: se calculó el índice de discriminación o homogeneidad mediante la correlación corregida entre el ítem y la puntuación total de la escala, obtenido que el índice de homogeneidad (IH) oscilan entre 0,32 y 0,77. Es decir, que el 76% del total de los ítems discrimina muy bien ya que obtuvieron puntuaciones entre 0,40 y 0,77, mientras que el 24% restante discriminan bien porque tienen puntuaciones entre 0,32 y 0,39.

Tabla 7.6: Índice de discriminación o homogeneidad de la escala de actitud hacia las matemáticas

k	r_{ix}	S_x	S_i	IH	k	r_{ix}	S_x	S_i	IH	k	r_{ix}	S_x	S_i	IH
1	0,44	17,48	0,80	0,40	9	0,64	17,48	1,30	0,59	17	0,52	17,48	1,12	0,47
2	0,42	17,48	1,16	0,37	10	0,43	17,48	1,19	0,38	18	0,50	17,48	1,17	0,45
3	0,63	17,48	1,25	0,58	11	0,38	17,48	1,18	0,32	19	0,80	17,48	1,34	0,77
4	0,52	17,48	1,25	0,47	12	0,55	17,48	1,32	0,49	20	0,69	17,48	1,39	0,64
5	0,50	17,48	1,32	0,44	13	0,60	17,48	1,09	0,56	21	0,66	17,48	1,35	0,61
6	0,49	17,48	1,10	0,44	14	0,74	17,48	1,31	0,71	22	0,43	17,48	1,19	0,38
7	0,52	17,48	1,12	0,47	15	0,55	17,48	1,32	0,49	23	0,45	17,48	1,13	0,39
8	0,59	17,48	1,18	0,54	16	0,50	17,48	1,32	0,44	24	0,71	17,48	1,31	0,67
										25	0,42	17,48	1,16	0,37

Fuente: Elaboración propia.

En suma, los análisis estadísticos relativos a la consistencia interna de la escala de actitudes hacia las matemáticas permiten afirmar que ésta reúne unas propiedades métricas que pueden considerarse aceptables.

7.4.4 Análisis de fiabilidad

A fin de verificar la consistencia interna de cada uno de los factores y la puntuación total de la muestra de estudiantes universitarios, se calculó el coeficiente alfa de Cronbach

para cada factor y la puntuación total. A continuación, se presentan los índices de consistencia interna obtenidos a través del alfa de Cronbach en los estudiantes universitarios nicaragüenses (ver Tabla 7.7).

Tabla 7.7: Índice de fiabilidad de la escala de actitud hacia las matemáticas

Factor	α
Ansiedad	0,786
Agrado	0,788
Utilidad	0,740
Motivación	0,449
Confianza	0,471
Puntuación Total	0,914

Fuente: Elaboración propia.

Se observa, en la tabla 7.7, que la consistencia interna es buena para los factores y para el conjunto total de la escala. Sin embargo, en los factores motivación y confianza no es muy alta lo cual puede deberse a que dichos factores tienen un número reducido de ítems, es decir, cada factor está constituido únicamente por 3 ítems. Sin embargo, las puntuaciones totales indican que la escala es confiable para evaluar las actitudes hacia las matemáticas.

7.4.5 Análisis Factorial

Una primera aproximación a la dimensionalidad del constructo se ha realizado a través del análisis factorial. Para ello la escala de actitud hacia las matemáticas fue sometida a un análisis factorial de componentes principales. Siguiendo el criterio de Kaiser, se obtuvieron 5 factores cuyo valor propio fuese inferior a uno. Los factores extraídos explican el 63,234% de la varianza total de los datos. La validez de dicho análisis quedó puesta de relieve mediante el examen de índice de KMO de Kaiser, Meyer y Olkin y del test de esfericidad de Bartlett. El primero pone de manifiesto la adecuación del tamaño muestral utilizado, mientras que el segundo indica que las correlaciones entre los ítems no configuran una mera matriz de identidad. Los resultados aparecen recogidos en la tabla 7.8.

Tabla 7.8: Análisis factorial de la escala de actitud hacia las matemáticas

Componente	Auto valores iniciales			Sumas de extracción de cargas al cuadrado		
	Total	% de varian- anza	% acumu- lado	Total	% de varianza	% acumulado
1	8,300	33,198	33,198	8,300	33,198	33,198
2	2,559	10,236	43,434	2,559	10,236	43,434
3	2,128	8,513	51,947	2,128	8,513	51,947
4	1,608	6,430	58,378	1,608	6,430	58,378
5	1,214	4,857	63,234	1,214	4,857	63,234

Fuente: elaboración propia

El análisis factorial muestra de forma bastante clara las 5 dimensiones de la escala de actitud hacia las matemáticas, dado que todos los ítems se saturan en los cinco factores. En síntesis, el análisis factorial vuelve a poner de manifiesto las adecuadas propiedades psicométricas del instrumento desarrollado para medir el constructo de interés. El análisis factorial constituye en sí mismo un excelente indicador de la consistencia interna de los ítems de un test, mediante el análisis de la matriz de correlaciones, del número de factores extraído y de la varianza explicada por cada uno de ellos. En este sentido, la tabla 7.9, presenta la solución factorial rotada.

Tabla 7.9: Solución factorial rotada

k	Factores				
	Ansiedad	Agrado	Utilidad	Motivación	Confianza
18	0.494	-0.281	0.002	-0.103	-0.009
17	0.568	0.452	0.433	-0.154	-0.219
12	0.594	0.495	-0.189	-0.404	0.151
8	0.595	-0.301	0.027	0.152	-0.321
7	0.568	0.452	0.433	-0.154	-0.219
13	0.624	-0.175	0.044	0.150	-0.358
3	0.650	-0.249	-0.113	-0.010	-0.166
22	0.713	0.231	0.457	0.159	0.218
2	0.727	0.360	-0.259	0.464	0.069
14	-0.193	0.751	-0.294	0.078	0.025
4	-0.126	0.540	-0.016	-0.027	-0.052

k	Factores				
	Ansiedad	Agrado	Utilidad	Motivación	Confianza
9	-0.090	0.666	-0.296	0.098	-0.031
24	-0.270	0.725	-0.071	0.007	0.033
15	-0.189	-0.404	0.594	0.495	0.151
16	-0.118	-0.477	0.543	0.434	-0.093
6	0.051	-0.211	0.478	0.347	-0.022
19	-0.039	0.029	0.809	-0.224	0.065
1	-0.119	-0.138	0.455	0.442	-0.058
21	-0.072	-0.070	0.641	-0.324	0.227
10	0.457	0.231	0.218	0.713	0.159
5	-0.093	-0.477	0.434	0.543	-0.118
25	0.464	0.360	-0.259	0.727	0.069
11	0.367	-0.225	-0.084	0.034	0.484
20	-0.026	-0.273	-0.042	-0.006	0.683
23	-0.284	-0.100	-0.141	-0.034	0.432

Fuente: Elaboración propia.

También, se observa en la tabla 7.10 que los factores presentan correlaciones positivas entre sí, las magnitudes de esas correlaciones se consideran adecuadas y altas, lo que indica que todas las dimensiones o factores de la escala de actitud hacia las matemáticas están estrechamente relacionadas.

Tabla 7.10: Correlaciones entre los factores de la escala de actitud hacia las matemáticas

Factores	Correlaciones				
	1	2	3	4	5
Agrado	1,00				
Utilidad	0,703	1,00			
Ansiedad	0,695	0,729	1,00		
Motivación	0,435	0,626	0,722	1,00	
Confianza	0,636	0,647	0,535	0,328	1,00

Fuente: Elaboración propia.

7.4.6 Análisis de las medias en los factores

Se realizó un análisis de varianza de los resultados obtenidos en la aplicación del instrumento por el grupo de estudiantes universitarios participantes. Para facilitar la comparación entre factores, en todos los análisis posteriores las puntuaciones se han normalizado en una escala de 1 a 5, dividiendo la puntuación de la escala entre el número de los ítems que la componen (25), y la puntuación de cada factor entre el número de ítems que componen dicho factor.

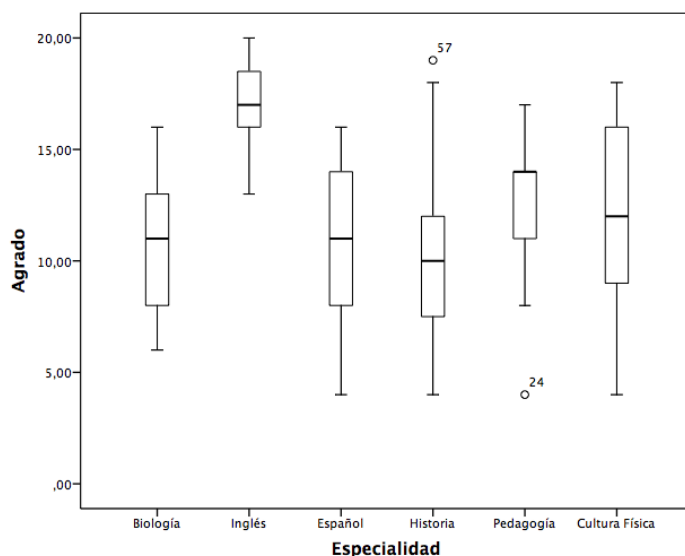
Tabla 7.11: Media entre los factores actitudinales

Factor	Media	Mn	DS
Agrado	12,4505	3,113	4,05287
Utilidad	20,8736	3,479	4,85713
Ansiedad	29,9341	3,326	6,47358
Motivación	10,0879	3,363	2,54744
Confianza	11,0220	3,674	2,60886
Puntuación Total	84,33681	3,373	17,48849

Fuente: Elaboración propia

A partir de estos resultados, se realizó un análisis del factor por especialidad, encontrando que los estudiantes de Inglés tienen un mayor agrado hacia las matemáticas, mientras que los estudiantes de Historia tienden a tener un menor agrado hacia esta asignatura. No obstante, los estudiantes de Biología, Español, Pedagogía y Cultura Física, obtuvieron puntuaciones por encima de la media, este resultado pone de manifiesto una actitud neutral hacia las matemáticas, véase en la figura 7.1.

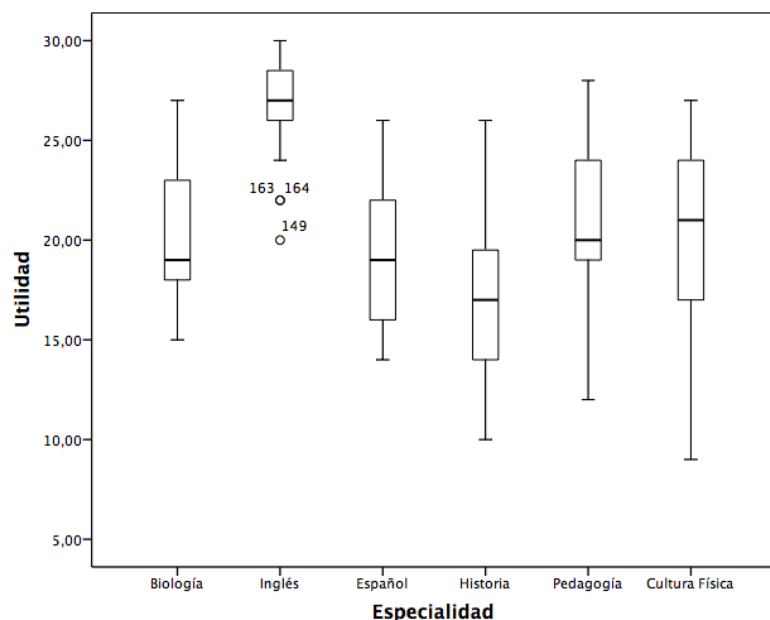
Figura 7.1: Tendencias del factor agrado por especialidad



Fuente: Elaboración propia.

En el factor utilidad, los estudiantes de Inglés manifiestan una actitud más positiva. En la figura 7.2, se puede observar que existen diferencias entre las especialidades, pero que las especialidades tienen una tendencia positiva en el factor.

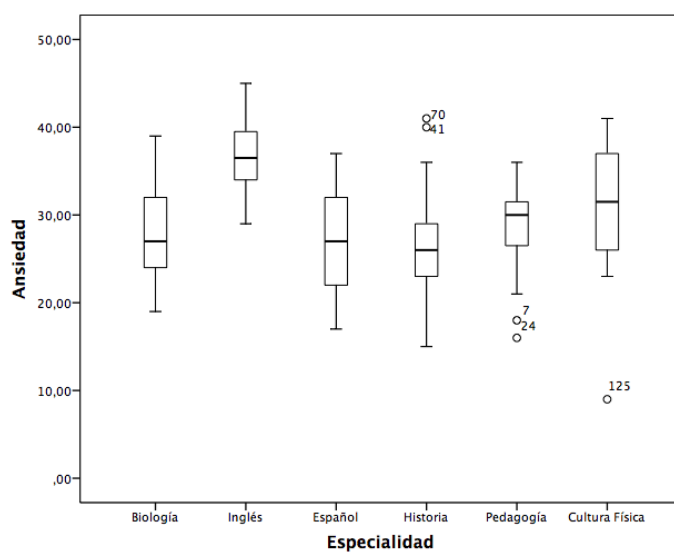
Figura 7.2: Tendencias del factor utilidad por especialidad



Fuente: Elaboración propia.

También, se obtuvieron las tendencias de las especialidades hacia el factor ansiedad y se encontró que los estudiantes de inglés presentan una menor ansiedad, ya que la escala está codificada de modo que a mayor puntuación menor ansiedad, con respecto a las otras especialidades, véase en la figura 7.3.

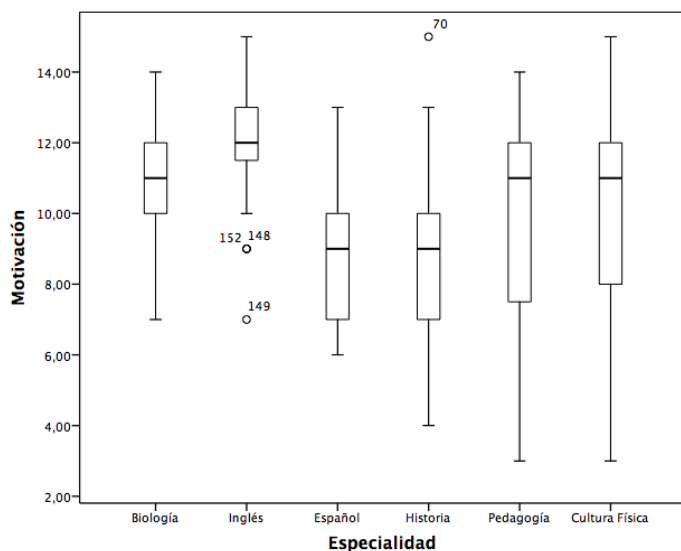
Figura 7.3: Tendencias del factor ansiedad por especialidad



Fuente: Elaboración propia.

Igualmente se cruzó la variable especialidad con el factor motivación, obteniendo como resultado que todos los estudiantes de las especialidades se sienten motivados hacia las matemáticas, pero la especialidad de Inglés es la que más motivación mostró (véase figura 7.4).

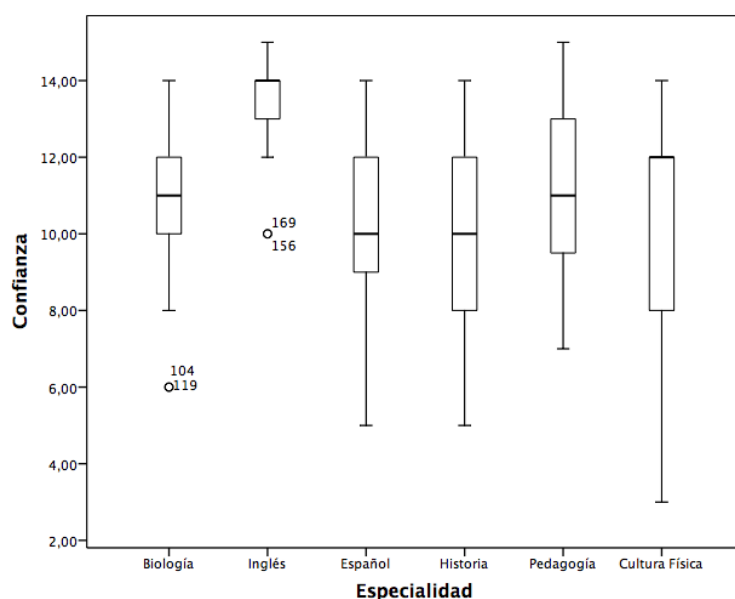
Figura 7.4: Tendencias del factor motivación por especialidad



Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, se relacionó la variable especialidad con el factor confianza, consiguiendo resultados satisfactorios entre las especialidades, ya que los estudiantes se sienten con confianza en situaciones matemáticas y, los estudiantes de inglés obtuvieron los mayores puntajes en este factor, véase en la figura 7.5.

Figura 7.5: Tendencias del factor confianza por especialidad



Fuente: Elaboración propia.

7.4.7 Análisis de las puntuaciones totales de la escala

Se procedió a calcular la prueba T para muestras independientes. En concreto, se comparó las medias de puntuación total (ITotal) de los grupos definidos por las variables género (Masculino y Femenino), así que se utilizó la prueba T, con el siguiente planteamiento: H_0 : Las varianzas en la variable género son iguales; H_1 : Las varianzas en la variable género son diferentes.

Tabla 7.12: Estadísticos descriptivos entre género en la escala de actitud hacia las matemáticas

	Género	N	$\bar{x}$	δ	SEM
ITotal	Masculino	81	89,1111	18,74033	2,08226
	Femenino	101	80,5644	15,48510	1,54083

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 7.12, observamos, que las puntuaciones medias del grupo de hombres son superiores al grupo de mujeres. Por tanto, lo anterior se verificó con los resultados de la prueba T (véase tabla 7.13).

Tabla 7.13: Prueba T para muestras independientes en la escala de actitud hacia las matemáticas

		Prueba de Levene de calidad de varianzas		Prueba t para la igualdad de medias						
		F	Sig.	t	gl	Sig.	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
									Inferior	Superior
ITotal	Se asumen varianzas iguales	5,249	0,023	3,369	180	0,001	8,54675	2,53694	3,54079	13,55272
	No se asumen varianzas iguales			3,299	154,531	0,001	8,54675	2,59036	3,42968	13,66383

Fuente: Elaboración propia.

La tabla 7.13, ofrece, en primer lugar, la probabilidad asociada al estadístico de Levene (0,023) es menor que 0,05, por lo que se rechaza la hipótesis de igualdad de varianzas, y consecuentemente, el estadístico (t) toma el valor 3,299 y tiene asociado un grado de significación bilateral de 0,001. Este valor nos informó el grado de compatibilidad existente entre la diferencia observada entre las medias muestrales de los grupos comparados y la hipótesis nula de que las medias poblacionales son iguales. Puesto que 0,001 es menor que 0,05, entonces se rechaza la hipótesis de igualdad de medias y, razonablemente, se puede concluir que las puntuaciones totales entre hombres y mujeres no son iguales. En defini-

tiva, los límites de confianza nos permitieron estimar que la verdadera diferencia entre la puntuación total de la población de hombres y la puntuación total de mujeres se encuentra entre 3,42968 y 13,66383 puntos. El hecho de que el intervalo obtenido no incluye ya el valor cero también nos permitió rechazar la hipótesis de igualdad de varianza.

7.5 CONCLUSIONES

Para el análisis de la estructura factorial de la escala de actitud hacia las matemáticas se llevaron a cabo diferentes análisis relacionados con las propiedades psicométricas de la escala:

- El análisis de los ítems se realizó mediante el índice de homogeneidad corregido entre el ítem y la puntuación total en la escala, estas puntuaciones están entre 0,370 y 0,676.
- Para el análisis de la fiabilidad, se calculó la consistencia interna del instrumento a través del coeficiente de alfa de Cronbach obteniendo un valor de 0,914.
- La validez del constructo se analizó mediante el análisis factorial de componentes principales utilizando rotación Varimax, todos los ítems se saturan en cinco factores que explican conjuntamente el 63,234% del total de la varianza. Previamente se realizaron el test de esfericidad de Bartlett y el test de Kaiser, Meyer y Olkin (KMO), para comprobar la viabilidad del análisis factorial.
- Las puntuaciones medias entre los ítems se encuentran en un intervalo de 2,89 a 4,20, siendo el ítem 4 con menor puntuación y el ítem 1 con mayor puntuación.
- La desviación estándar entre los ítems tiene una frecuencia desde 0,89 a 1,39, concurriendo el ítem 1 con menor desviación y el ítem 20 con mayor desviación.
- El instrumento inicial estaba formado por 25 ítems y 5 factores diferentes. En el análisis de la escala se confirma la estructura factorial de la escala de actitud hacia las matemáticas de Auzmendi (1992).

Sobre las posibles variaciones de actitud hacia las matemáticas en el estudio se encontró:

- El análisis de las medias indica que, en todos los casos los estudiantes de la especialidad en Inglés apuntan hacia puntuaciones altas con respecto a las demás especialidades.
- Los resultados de la prueba T para muestra independientes, muestra que las puntuaciones totales entre hombres y mujeres no son iguales.

Para concluir, la escala analizada parece ser válida y fiable. Contar con una escala de actitud hacia las matemáticas es de gran importancia ya que permite visualizar la ansiedad, el agrado, la utilidad, la confianza y la motivación hacia las matemáticas, como parte de un engranaje global que se puede aplicar en contextos diversos.

CAPÍTULO 8:

METODOLOGÍA

“Un trabajo de investigación en didáctica de las matemáticas es apoyado en un marco teórico dirigido al descubrimiento de algo desconocido y a la mejora de los conocimientos existentes sobre un tema” (Gutiérrez, 1991, p.149).

8.1 INTRODUCCIÓN

Las investigaciones en didáctica de las matemáticas se han centrado tradicionalmente, según Gutiérrez (1991), en:

- Trabajos de elaboración de teorías de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Abordando las diferentes componentes matemáticos, psicológicos y pedagógicos que intervienen en los procesos de comprensión y aprendizaje de las matemáticas.
- Trabajos de aquellos profesores que deciden completar o sustituir el contenido del libro de texto y elaboran bloques de actividades o planes de enseñanza complementarias con lo que intentan mejorar la eficacia de su enseñanza y la profundidad del aprendizaje de sus estudiantes.
- Actividad que realizan la mayoría de los investigadores, que consiste en estudiar alguna parcela de la enseñanza o el aprendizaje de la Matemática, haciendo un análisis de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, sus formas de comprensión de conceptos o las dificultades que encuentran, para desarrollar métodos de enseñanza.

Sin embargo, no todos estos trabajos constituyen “investigación”. Tomamos como punto de partida la idea de que una investigación es “un trabajo apoyado en un marco teórico y dirigido al descubrimiento de algo desconocido y a la mejora de los conocimientos existentes sobre un tema” (Gutiérrez, 1991, 141). Schoenfeld (2001) señala dos propósitos principales de lo que constituye la investigación en educación matemática:

- Puro (Ciencia Básica): comprender la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje.
- Aplicado (Ingeniería): utilizar esta comprensión para mejorar la instrucción matemática.

Ambos están profundamente entrelazados siendo el primero, al menos, tan importante como el segundo. Sostendría Schoenfeld (2001) que algunas de las contribuciones fundamentales de la investigación en educación matemática son las siguientes:

- Perspectivas teóricas para comprender el pensamiento, el aprendizaje y la enseñanza.
- Descripciones de aspectos de la cognición.
- Pruebas de existencia (evidencia de casos en los que los estudiantes pueden aprender a resolver problemas, inducción, teoría de grupos; evidencia de la viabilidad de varios tipos de instrucción).
- Descripciones de consecuencias (positivas y negativas) de varias formas de instrucción.

Esta investigación se enmarca en el segundo de los puntos señalados por Gutiérrez (1991) y aporta elementos en las líneas de investigación señaladas por Schoenfeld (2001).

Por tales razones, el propósito de este capítulo es poner de manifiesto las líneas generales que se han seguido para el diseño de esta investigación, por lo que se describen: los objetivos de la investigación; la hipótesis de la misma; las variables de estudio; la metodología diseñada para realizar la investigación; las características de la muestra; los instrumentos utilizados; procedimientos de análisis y enfoque ético.

8.2 OBJETIVOS DEL ESTUDIO

Reconocer la diversidad en la clase de matemáticas, permite aprovechar los distintos saberes que se encuentran en el aula, incorporar los contextos socioculturales a los procesos de enseñanza y aprendizaje y permite expandir los elementos de resolución de problemas para hallarle sentido a los aprendizajes que, posteriormente, se transfieren a la vida cotidiana. Sin embargo, el bajo nivel de acceso a las instituciones de educación superior de estudiantes en contexto de diversidad, obedece que, un alto porcentaje del estudiantado que provienen de poblaciones en contexto de diversidad, llegan con carencias en sus habilidades matemáticas, desfavoreciendo el aprendizaje de algunas de las nuevas materias relacionadas con las matemáticas y el abordar con éxito la resolución de problemas de aplicación.

Por lo tanto, esta investigación tiene como propósito el análisis de la práctica de resolución de problemas matemáticos por estudiantes universitarios. Es decir, interpretar las prácticas discursivas y operativas que realizan los estudiantes universitarios cuando resuelven problemas matemáticos. También se quiere describir si una actitud positiva hacia las matemáticas favorece el que los estudiantes configuren soluciones de alto nivel en los problemas matemáticos. Partiendo de lo descrito, puede formularse el objetivo general de la siguiente manera:

Objetivo general: Analizar los procesos de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes universitarios.

Se ha formulado este objetivo fijando la atención en la faceta cognitiva de los procesos de resolución de problemas matemáticos. Se trata, por tanto, de analizar los significados personales que, de forma individual, ofrecen los estudiantes individualmente. Según el enfoque ontosemiótico el análisis e interpretación de tales significados personales debe hacerse en el marco de unos significados institucionales previamente establecidos (Godino, 2003). Por lo tanto, es necesario reconstruir las prácticas institucionales operativas y discursivas requeridas en la solución de las situaciones-problemas seleccionadas, así como las relaciones existentes entre la resolución de problemas y los factores asociados a las actitudes hacia las matemáticas.

Lo que lleva a formular los siguientes **Objetivos Específicos**:

1. Determinar los tipos de configuraciones de objetos y procesos que utilizan los estudiantes universitarios en la resolución de problemas matemáticos.
2. Detectar las principales dificultades manifestadas por los estudiantes universitarios ante la resolución de problemas matemáticos.
3. Identificar las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes universitarios.
4. Estudiar si existen diferencias significativas entre especialidad, género y etnia en relación con los niveles de resolución de problemas matemáticos y las actitudes hacia las matemáticas.
5. Explicar las dificultades detectadas en la resolución de problemas matemáticos en términos de los procesos matemáticos y las actitudes hacia las matemáticas.

El interés de abordar estos objetivos se centra en el objetivo nuclear que tienen los procesos de resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. De ahí que su evaluación y desarrollo debe ser un objetivo de la enseñanza en los distintos niveles educativos. En el caso de la educación matemática, el conocimiento de las habilidades para la práctica de resolución de problemas matemáticos es, sin duda, una información necesaria para el diseño de acciones formativas fundamentadas sobre este contenido curricular (NCTM, 2000).

8.3 HIPÓTESIS

En nuestra investigación las hipótesis deben entenderse como expectativas de resultados, las expresamos en los siguientes términos:

HIPÓTESIS 1: Los tipos de objetos y procesos operativizan las nociones cognitivas usadas para la resolución de problemas matemáticos.

HIPÓTESIS 2: Las configuraciones cognitivas de los estudiantes se relacionan con los niveles de resolución de problemas matemáticos.

HIPÓTESIS 3: La recurrencia a configuraciones cognitivas de alto nivel es más frecuente que la recurrencia a configuraciones cognitivas de bajo nivel en la resolución de un mismo problema matemático.

HIPÓTESIS 4: La recurrencia a las configuraciones cognitivas de bajo nivel se relacionan con la complejidad de los objetos y procesos requeridos para la resolución de problemas matemáticos.

HIPÓTESIS 5: La actitud positiva hacia las matemáticas se relaciona con la recurrencia a configuraciones cognitivas de alto nivel en la resolución de problemas matemáticos.

8.4 VARIABLES

En esta investigación se han clasificado las variables en variables dependientes, independientes y moderadoras. Las variables dependientes serán los efectos o resultados respecto a los cuales hay que buscar su motivo o razón de ser; las variables independientes, son las variables explicativas, cuya asociación o relación con la variable dependiente se pretende descubrir en la investigación; y las variables moderadoras, son aquellas que modifican la relación entre la variable independiente de primer orden y la dependiente, véase esta clasificación en la tabla 8.1.

Tabla 8.1: Tipos de variables en la investigación

Variables dependientes	Variables independientes	Variables moderadoras
Nociones Cognitivas (H1)	Tipos de objetos y procesos (H1).	Especialidad Género Etnia
Niveles de resolución de problemas matemáticos (H2)	Configuraciones Cognitivas (H2).	
Configuraciones Cognitivas de bajo nivel (H4)	Complejidad de los objetos procesos (H4).	
Configuraciones cognitivas de alto nivel (H5)	Actitud hacia las matemáticas (H5).	

Fuente: Elaboración propia.

8.4.1 Variables dependientes

- **Nociones cognitivas:** significados personales de los estudiantes (conocimiento, comprensión y competencia sobre los contenidos matemáticos básicos).
- **Niveles de resolución de problemas matemáticos:** se caracterizan por los procesos empleados y por el grado de complejidad con que los estudiantes los ejecutan al abordar tareas de dificultad creciente, es decir, nivel alcanzado por los estudiantes, que determinan empíricamente y se expresa en escala.
- **Configuraciones cognitivas de bajo nivel:** son los argumentos incorrectos que manifiestan los estudiantes en sus respuestas en el cuestionario. Estos argumentos incorrectos

se clasifican en los siguientes tipos de errores: situacional, conceptual, procedimental y combinados.

- **Configuraciones cognitivas de alto nivel:** son los argumentos correctos que los estudiantes manifiestan en sus respuestas en el cuestionario. Estos argumentos correctos están determinados por la noción de configuración cognitiva.

8.4.2 Variables independientes

- **Tipos de objetos y procesos:** prácticas requeridas en la solución de una tarea matemática constituida en una configuración cognitiva.
- **Configuraciones cognitivas:** redes de objetos y procesos personales que los estudiantes plantean al resolver una práctica matemática.
- **Complejidad de los objetos y procesos:** se define como las dificultades de comprensión de los objetos y procesos matemáticos para la resolución de un problema matemático.
- **Actitud hacia las matemáticas:** se define por el nivel de agrado, motivación, utilización, confianza y ansiedad que los estudiantes poseen hacia las matemáticas.

8.4.3 Variables moderadoras en la investigación

- **Especialidad:** el estudio de un grado académico universitario: Administración de Empresas, Contabilidad Pública, Informática Administrativa, Ingeniería Civil, Ingeniería Agroforestal, Ingeniería en Zootecnia, Medicina Intercultural, Psicología en contexto Multiculturales, Sociología con Mención en Autonomía, Comunicación Intercultural y Desarrollo Local.
- **Género:** hombres y mujeres como actores fundamentales en los procesos de resolución de problemas matemáticos.
- **Etnia:** conjunto de personas que comparten rasgos culturales, en nuestro caso 4 grupos étnicos: Miskitu, Mayangna, Creole y Mestizo.

8.5 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

A continuación, se describen las bases para el diseño de la investigación, cuya característica permitirá dar respuesta a los objetivos propuesto.

8.5.1 Enfoque de la investigación

La naturaleza de la temática de la investigación reclama la integración sistemática de los métodos cualitativos y cuantitativos en un solo estudio con el fin de obtener una fotografía más completa del fenómeno (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010). En

este escenario, se ha realizado una investigación con “Enfoque Mixto”, en donde se ha combinado la perspectiva cualitativa y cuantitativa. La integración del método cualitativo permite describir e interpretar la realidad educativa con el fin de llegar a la comprensión o a la transformación de dicha realidad, a partir del significado atribuido por las personas que la integran (Bisquerra, 2009). Esto ha proporcionado una visión más amplia de la investigación, específicamente de las prácticas puestas en juego para intentar responder a las preguntas del estudio. Por su parte, la metodología de tipo cuantitativo ha ayudado al tratamiento de los datos a través de la categorización y descripción de las propiedades, características y los perfiles de las personas, grupos, comunidades, procesos y objetos sometidos a análisis (Hernández et al., 2010).

8.5.2 Diseño de la investigación

Siguiendo las clasificaciones que propone Bisquerra (2012), podemos encuadrar nuestro trabajo como una investigación aplicada, puesto que va encaminada a la resolución de un problema práctico, que es la mejora de la formación de estudiantes universitarios en un área de contenido específica. Razón por la cual esta investigación tiene un diseño “Ex Post Facto”, ya que tratamos de descubrir fenómenos que ocurren en forma natural midiendo diversas variables para analizar su posible efecto (Fernández, 2011).

8.6 MUESTRA

En la terminología de Azorín y Sánchez-Crespo (1986), citado por Fernández (2011), el universo de nuestro estudio o población de estudiantes sobre la que se centra son los estudiantes de primer ingreso a la Universidad. La muestra utilizada está compuesta por 876 estudiantes universitarios de los Grados en Administración de Empresas, Contabilidad Pública, Informática Administrativa, Ingeniería Civil, Ingeniería Agroforestal, Ingeniería en Zootecnia, Medicina Intercultural, Psicología en contexto Multiculturales, Sociología con Mención en Autonomía, Comunicación Intercultural y Desarrollo Local de la Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense pertenecientes a comunidades de la Costa Caribe de Nicaragua. Esta muestra fue recogida en el año académico 2014-2015. Se ha restringido la población a la que generalizar los resultados por consideraciones operativas y porque, en general, estos estudiantes tienen unas características similares a otras comunidades nicaragüenses, con edades entre 17 y 20 años. La distribución por especialidades se resume en la tabla 8.2. El 42% de los participantes fueron hombres y el 58% restantes fueron mujeres.

Tabla 8.2: Distribución de la muestra de la investigación por especialidad

	Especialidades	Hombres	Mujeres	Total	%
Validos	Administración de Empresas	40	73	113	13%
	Contabilidad Pública y Auditoria	13	39	52	6%
	Informática Administrativa	38	55	93	11%
	Ingeniería Civil	62	19	81	9%
	Ingeniería Agroforestal	48	65	113	13%
	Ingeniería Zootecnia	49	32	81	9%
	Medicina Intercultural	18	52	70	8%
	Psicología en Contexto Multiculturales	38	66	104	12%
	Sociología con Mención en Autonomía	35	54	89	10%
	Comunicación Intercultural	17	23	40	5%
	Desarrollo Local	14	26	40	5%
	Total	372	504	876	100%
	%	42%	58%		

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 8.3 se muestra el resumen de la distribución de los participantes por especialidad y grupo étnico (Miskito “Mk”; Mayangna “Mg”; Creole “CrI”; Mestizo “Mz”), así como la distribución por grupo étnico y género (H: hombres; M: mujeres):

Tabla 8.3: Distribución de la muestra de la investigación especialidad y grupo étnico

Especialidades	M	Mg	C	Mz	Total	%	Etnia	H	M	Total	%
Administración de Empresas	9	1	13	90	113	13%	Mk	91	111	202	23%
Contabilidad Pública y Auditoria	2	0	1	49	52	6%					
Informática Administrativa	24	7	20	42	93	11%	Mg	17	30	47	6%
Ingeniería Civil	37	1	2	41	81	9%					
Ingeniería Agroforestal	16	0	6	91	113	13%	CrI	38	45	83	9%
Ingeniería Zootecnia	8	8	0	65	81	9%					

Especialidades	M	Mg	C	Mz	Total	%	Etnia	H	M	Total	%
Medicina Intercultural	55	2	1	12	70	8%	Mz	226	318	544	62%
Psicología en Contexto Multiculturales	14	11	35	44	104	12%					
Sociología con Mención en Autonomía	30	5	5	49	89	10%					
Comunicación Intercultural	4	9	0	27	40	5%					
Desarrollo Local	3	3	0	34	40	5%					
Total	202	47	83	544	876	100%	Total	372	504	876	100%
%	23%	6%	9%	62%			%	42%	58%		

Fuente: Elaboración propia.

Cabe destacar que el proceso de investigación se realizó en la Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense (URACCAN). Esta institución de educación superior está ubicada en la Región Autónoma de la Costa Caribe de Nicaragua y cuenta con cuatro Recintos Universitarios: dos en el Caribe Norte de Nicaragua (Recinto Universitario Bilwi, Recinto Universitario Las Minas); y dos Caribe Sur de Nicaragua (Recinto Universitario Bluefields, Recinto Universitario Nueva Guinea).

8.7 INSTRUMENTOS PARA LA RECOPILACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Conscientes del interés y la riqueza que aporta un análisis cuantitativo y cualitativo en una investigación, se plantea la aplicación de un cuestionario cognitivo y una escala de actitud hacia las matemáticas que se definen a continuación:

8.7.1 Cuestionario cognitivo

Para recolectar la información se suministró al estudiantado un cuestionario compuesto por 32 ítems, dicho instrumento trata de evaluar los procesos de resolución de problemas matemáticos, en particular, problemas algebraicos. En el capítulo 6, se presenta el proceso de adaptación y validación.

Cabe mencionar que, el cuestionario cognitivo posee una elevada consistencia interna, esto se debe a que el coeficiente de Kuder-Richardson que comprueba la consistencia interna de las mediaciones con opciones dicotómicas para la puntuación total del instrumento, obtuvo un $K-R=0,87$ de fiabilidad. Este resultado coincide con el coeficiente

de consistencia interna alfa de Cronbach, que se basa en el análisis relativo de la varianza total del cuestionario y de las varianzas de los ítems en particular.

En la tabla 8.4 se muestran los resultados obtenidos con el total de los ítems del cuestionario. El valor obtenido con el total de la muestra es de 0,86, que corresponde a una correlación entre la puntuación observada y la puntuación verdadera 0,87. Estos resultados pueden ser debidos al hecho de que el cuestionario evalúa un conjunto de conocimientos muy amplios.

Tabla 8.4: Fiabilidad del cuestionario cognitivo con la muestra de la investigación

k	Media de la escala si se omite el ítem	Varianza si se omite el ítem	Correlación corregida ítem-total	Alfa si omite el ítem
1	18,8482	42,060	0,306	0,863
2	18,8253	42,887	0,174	0,867
3	18,8208	41,711	0,359	0,862
4	18,5936	41,800	0,375	0,862
5	18,6062	41,284	0,458	0,860
6	18,5457	42,177	0,330	0,863
7	18,6872	41,651	0,374	0,862
8	18,8162	42,141	0,290	0,864
9	18,5548	42,261	0,311	0,863
10	18,8014	41,657	0,366	0,862
11	18,5765	42,126	0,326	0,863
12	18,5868	42,135	0,320	0,863
13	18,6518	41,537	0,401	0,861
14	18,9007	42,236	0,285	0,864
15	18,4669	42,661	0,285	0,864
16	18,4669	42,946	0,228	0,865
17	18,8607	42,319	0,266	0,864
18	18,9201	42,492	0,247	0,865
19	18,5776	41,447	0,443	0,860
20	18,6290	40,972	0,502	0,858
21	18,6963	40,845	0,504	0,858
22	18,6427	40,982	0,496	0,859

k	Media de la escala si se omite el ítem	Varianza si se omite el ítem	Correlación corregida ítem-total	Alfa si omite el ítem
23	18,5491	41,226	0,499	0,859
24	18,7957	41,850	0,335	0,863
25	18,7911	41,384	0,410	0,861
26	18,6701	40,877	0,505	0,858
27	18,4943	42,493	0,300	0,863
28	18,7100	41,015	0,474	0,859
29	18,6838	40,941	0,491	0,859
30	18,5491	41,647	0,423	0,861
31	18,6667	40,600	0,552	0,857
32	18,6495	40,898	0,508	0,858

Fuente: Elaboración propia.

Sin embargo, la consistencia interna indica que el cuestionario es confiable para evaluar la prácticas de resolución de problemas.

8.7.2 Escala de actitud hacia las matemáticas

La escala utilizada para la investigación ha constado de 25 ítems distribuidos en cinco factores: ansiedad, agrado, motivación, utilidad y confianza (Auzmendi, 1992). En el capítulo 7, se muestra el proceso de análisis de la estructura factorial de la escala.

Entre los diversos métodos de estimar la fiabilidad de una escala, hemos tomado, en primer lugar, el método de consistencia interna. Su cálculo se basa en el análisis relativo de la varianza de la puntuación total de la escala y de las varianzas de los ítems particulares y el coeficiente que lo mide es el alfa de Cronbach. También, es una cuota inferior de la que se obtendría por el método de la prueba repetida si se comparase el test dado y otro cualquiera paralelo de igual cantidad de ítems. Una vez efectuado el cálculo los resultados son los que se presentan en la tabla 8.5.

Tabla 8.5: Fiabilidad de la escala de actitud hacia las matemáticas con la muestra de la investigación

k	Media sin el ítem	Varianza sin el ítem	Correlación con el total	Alfa sin el ítem
1	72,6598	267,057	0,495	0,869
2	73,7763	273,650	0,299	0,874
3	73,5879	267,449	0,435	0,871

k	Media sin el ítem	Varianza sin el ítem	Correlación con el total	Alfa sin el ítem
4	73,9932	274,946	0,305	0,874
5	73,8276	273,997	0,345	0,873
6	72,6884	267,076	0,474	0,870
7	73,8082	270,315	0,380	0,872
8	73,3858	266,541	0,431	0,871
9	73,6495	267,746	0,433	0,871
10	73,8048	268,512	0,447	0,870
11	72,9053	265,279	0,484	0,869
12	73,8619	269,241	0,428	0,871
13	73,5822	268,095	0,419	0,871
14	73,6119	261,417	0,547	0,867
15	73,6598	268,264	0,428	0,871
16	73,8790	271,181	0,393	0,872
17	73,7991	270,860	0,367	0,872
18	73,6769	265,869	0,480	0,869
19	73,6142	261,545	0,563	0,867
20	73,1849	263,881	0,495	0,869
21	73,0582	262,773	0,524	0,868
22	73,7329	272,438	0,322	0,874
23	72,7785	270,152	0,420	0,871
24	73,2557	262,131	0,537	0,868
25	73,8345	268,259	0,448	0,870

Fuente: Elaboración propia.

Hemos obtenido un valor $\alpha=0,88$ para el coeficiente de Cronbach. Consideramos que este valor es suficientemente elevado para nuestro propósito. También para cada ítem proporcionamos información sobre la forma en que afecta a la fiabilidad global. Con respecto, a la correlación con el total de la prueba presenta valores que van desde 0,299 para el ítem 2, “la asignatura de matemáticas se me da bastante mal” hasta el máximo de 0,563 que corresponde al ítem 19, “me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las matemáticas” y que es, por tanto, el que mejor puede representar las actitudes globales de los estudiantes. Es oportuno este valor subjetivo que le dan los estudiantes a las matemáticas y explica, en gran medida, el hecho de que la matemática pueda posteriormente ser utilizada en cualquier aspecto de la vida.

El resto de los valores (Media sin el ítem, Varianza sin el ítem y Alfa sin el ítem), permanecen muy estables para las diferentes cuestiones. Pensamos que ello señala una contribución homogénea de cada ítem a la fiabilidad de la escala, lo que refuerza la elección hecha de la escala de actitud hacia las matemáticas de Auzmendi (1992) para los propósitos de la investigación. Adicionalmente, hemos calculado la consistencia interna de cada uno los factores asociados a las actitudes hacia las matemáticas, obteniendo los resultados siguientes:

Tabla 8.6: Fiabilidad de los factores actitudinales con la muestra de la investigación

Factores	k	Alfa de Cronbach
Agrado	4	0,60
Utilidad	6	0,70
Ansiedad	9	0,70
Motivación	3	0,52
Confianza	3	0,66
Puntuación Total	25	0,88

Fuente: Elaboración propia.

Se observa en la tabla 8.6, que la consistencia interna es buena para los factores y la puntuación total. Sin embargo, existen diferencias entre los factores y esto se debe a que los factores agrado, confianza y motivación están formados por entre 3 y 4 ítems. No obstante, las puntuaciones totales indican que la escala es confiable para evaluar las actitudes hacia las matemáticas.

8.8 PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Para “Determinar los tipos de configuraciones de objetos y procesos que utilizan los estudiantes universitarios en la resolución de problemas matemáticos”; realizamos un análisis en profundidad de ejemplos prototípicos de respuestas de estudiantes para cada nivel de resolución de problemas tomando en cuenta la complejidad del ítem. Este análisis permite caracterizar tipos de configuraciones cognitivas, considerando los objetos primarios del enfoque ontológico y semiótico (lenguaje, conceptos-definiciones, propiedades, procedimientos, argumentos y situación problema). Para “Detectar las principales dificultades manifestadas por los estudiantes universitarios ante la resolución de problemas matemáticos”; se han utilizado familias de errores o conflictos del tipo situacional, conceptual, procedimental y combinados que manifiestan los estudiantes al responder a cada ítem. Hay que subrayar que la incidencia en la muestra de estudiantes de los tipos de configuraciones cognitivas

y de las principales dificultades en la resolución de problemas también se han analizado desde un punto de vista cuantitativo aplicando técnicas descriptivas de análisis estadístico (tabla de frecuencias).

Para “*identificar las actitudes hacia las matemáticas en los estudiantes universitarios*”; analizamos, en primer lugar, las puntuaciones globales en los factores asociados a las actitudes hacia las matemáticas, y en segundo lugar, las relaciones existen entre los factores a través de un análisis de las correlaciones. Con el propósito de “Estudiar si existen diferencias significativas entre especialidad, género y etnia en relación con los niveles de resolución de problemas matemáticos y las actitudes hacia las matemáticas”, se realizó un análisis de varianza multifactorial para determinar la significación del efecto de las variables especialidad, género y etnia en los niveles de resolución de problemas matemáticos y finalmente un análisis de la varianza multifactorial de efectos fijos y prueba T para muestra independientes para conocer los efectos de las variables género, etnia y especialidad en los factores asociados a las actitudes hacia las matemáticas.

Para “*Explicar las dificultades detectadas en la resolución de problemas matemáticos en términos de los procesos matemáticos y las actitudes hacia las matemáticas*”; partimos de la noción de comprensión en matemática, y se trata de explicar a qué se debe esta incidencia en los niveles de complejidad de resolución de problemas en términos de procesos matemáticos involucrados y su relación con las actitudes hacia la matemática se determina con la correlación de Tau-Kendall.

8.9 ENFOQUE ÉTICO

Para acceder a realizar el estudio en la Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense (URACCAN), se solicitó una entrevista con la Rectora, a quien se le proporcionará una copia del proyecto brindándole información relevante vinculada a los objetivos y procedimientos de la investigación. Una vez otorgada la autorización por parte de la Rectoría de la Universidad, se preparó una nota de consentimiento informado para los estudiantes universitarios, profesores universitarios, donde se explicó los objetivos de la investigación, así como también los procedimientos de administración de las diferentes pruebas, quedando expresamente dicho que la participación era voluntaria y anónima. También se les aclaró que podían negarse a participar o a responder a alguna pregunta, si así lo deseaban.

CAPÍTULO 9:

RESULTADOS

“El aprendizaje de las matemáticas constituye, evidentemente, un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas e incluso la comprensión de textos” (Duval, 1999, p. 13).

9.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describen los principales resultados obtenidos en esta investigación. En primero lugar, se describen los tipos de objetos y procesos que los estudiantes universitarios utilizan en la solución de un problema matemático, así como las principales dificultades que los estudiantes presentaron al solucionar dichos problemas, además de los posibles efectos de las variables género, etnia y especialidad en los niveles de complejidad de resolución de problemas matemáticos.

También se detallan las actitudes hacia las matemáticas que poseen los estudiantes universitarios y sus posibles efectos en las variables etnia, género y especialidad. Al final de este capítulo se tratan de explicar las dificultades detectadas en la resolución de problemas matemáticos en términos de la comprensión de los procesos matemáticos y su relación con las actitudes hacia la matemática.

A continuación presentamos los resultados encontrados a lo largo del proceso de investigación en estos tres grandes apartados.

9.2 TIPOS DE CONFIGURACIONES DE OBJETOS Y PROCESOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS Y SUS PRINCIPALES DIFICULTADES

Antes de comenzar con el análisis propiamente dicho, es necesario describir los códigos que se han empleado en la pauta de corrección. Para cada uno de los ítems, en las tablas de frecuencias y porcentajes de respuestas, se utilizó el código (1) para argumentos correctos y el código (0) para argumentos incorrectos. Dentro de los argumentos incorrectos se clasificaron por familias de errores, véase la tabla 9.1. En el análisis de los ítems, la codificación nos proporcionará una descripción explícita del tipo error. En algunas de las categorías del tipo de error hemos estimado oportuno establecer subcategoría en función de la calidad del argumento aportado.

Tabla 9.1: Codificación según las familias de errores del cuestionario cognitivo

Tipo de Error		Descripción
Argumentos Incorrectos	Situacional	Errores relacionados con la expresión/contenido de la tarea; el lenguaje en el que está formulada la tarea, los diagramas, figuras, datos, etc.
	Conceptual	Errores debidos al uso o formulación de incorrecta de una definición o regla, concepto, propiedad (no a su aplicación)
	Procedimental	Aquellos errores que se producen al aplicar incorrectamente un procedimiento o una propiedad.
	Combinados	Cuando se combina dos o más errores de los anteriores
	No contestan	Sujetos que dejaron en blanco los ítems

Fuente: Elaboración propia.

Se analizaron los ítems con mayor grado de dificultad en los niveles de complejidad de los procesos de resolución de problemas matemáticos porque varios ítems tratan de medir los mismos contenidos en los diferentes sistemas de representación¹¹, es decir, los problemas planteados tratan de evaluar las propiedades de la adición y la multiplicación en los números reales (ítems: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 26); propiedades de orden de los números reales (ítems: 14, 22, 23, 24); proposiciones y funciones proposicionales (ítems: 3, 6, 7, 10, 13, 15, 18, 19, 20, 25, 27, 32); ecuaciones de primer grado con una incógnita (ítems: 9, 11, 16, 17, 29); y resolución algebraica de problemas verbales (ítems: 12, 21, 28, 30, 31).

En este sentido, se describirán los elementos primarios (el lenguaje utilizado, los conceptos implicados, las propiedades sobre las que se apoyan, los procedimientos empleados y los argumentos en que se apoyan dichos procedimientos) puestos en juego en la resolución de cada problema en términos de una configuración cognitiva. El número de configuraciones cognitivas asociada a cada uno de los ítems dependerá de las características del mismo y de las respuestas de los estudiantes. El análisis de los errores detectados en el desarrollo de los argumentos nos llevará a conectar a cada uno de ellos con una o varias de dichas configuraciones cognitivas (Fernández, Godino & Cajaraville, 2012).

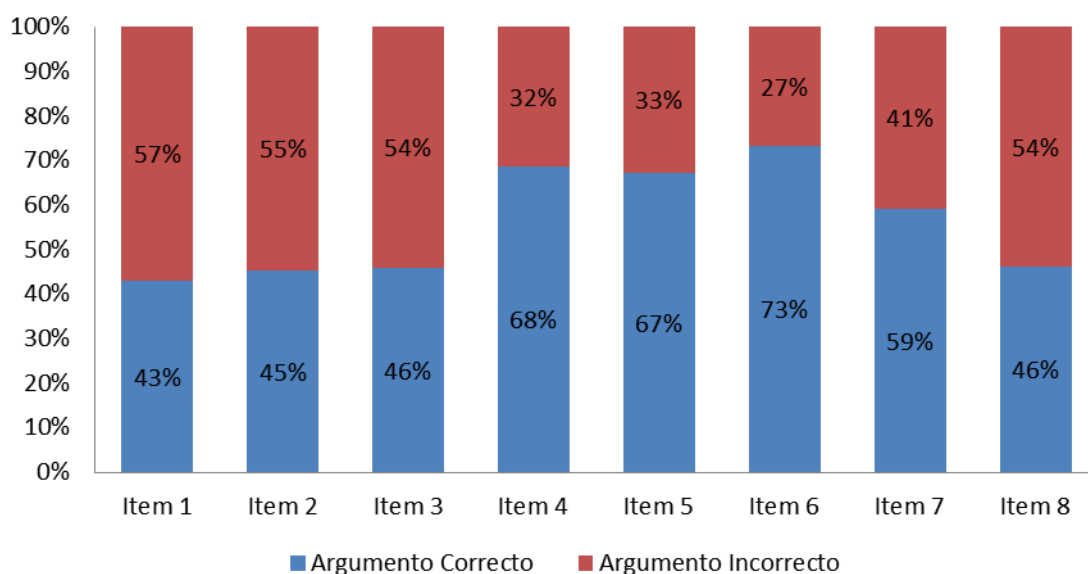
A continuación presentamos el análisis de los ítems organizados mediante los niveles de complejidad de resolución de problemas en un contexto algebraico.

¹¹ Sistemas de representación: cualquier modo en que se hace presente un objeto, concepto o idea. Los conceptos y propiedades matemáticas se hacen presentes mediante distintos símbolos, gráficos o signos: éstos constituyen las representaciones de los conceptos matemáticos.

9.2.1 Nivel 1 de complejidad en los procesos de resolución de problemas matemáticos

En la figura 9.1 se presentan los porcentajes de argumentos correctos y argumentos incorrectos de los 8 ítems que configuran el nivel 1 de complejidad. Las puntuaciones incorrectas están entre 27% y 57%, los ítems 1, 2, 3 y 8 son los que representan un alto grado de complejidad. Por tanto, se analiza las problemáticas en estos ítems.

Figura 9.1: Porcentajes de respuestas de los ítems que constituyen el primer nivel de complejidad



Fuente: Elaboración propia.

Análisis del ítem 1: Si a 4 le sumo n puede escribirse como $n+4$. Sume 4 a $3n$. (Justifica su respuesta).

En la tabla 9.2 podemos observar que la respuesta, que corresponde al argumento correcto, es elegida por un 43% de la muestra de 876 estudiantes. Los argumentos incorrectos representan el 57%, el error más alto es el procedimental con un 37%, lo que supera en un 17% a la suma de los otros tipos de errores.

Tabla 9.2: Frecuencias y porcentaje de respuesta en el ítem 1 del cuestionario cognitivo

Tipo de respuesta	Subcategorías/Argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Argumento Correcto	$(3n)+(4)=3n+4$	377	43
Situacional	Uso incorrecto del paréntesis	44	5
Conceptual	Uso incorrecto de las propiedades de las sumas	53	6

Tipo de respuesta	Subcategorías/Argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Procedimental	Suma 3+4 posterior 7n	325	37
Combinados	Suma 3+4 posterior 7+n	79	9
No contestan	No hay argumentos	0	0
Total		876	100

Fuente: Elaboración propia.

Las dificultades en este ítem son relativas al discernimiento del significado de los valores simbólicos, que les puede llevar a dar errores como $7n$ como respuesta de $3n+4$, que tiene que ver con su interpretación del símbolo de la operación. En aritmética, símbolo “+” se interpreta como una acción a realizar, es decir, “+” significa realizar la operación (Socas, Camacho, Palarea & Hernández, 1996). Por ejemplo, en aritmética el “+” de $5+8$, indica la operación suma entre 5 y 8, y no se suele escribirse $5+8$ más que como un paso previo para obtener el resultado: 13. La idea de que el símbolo de la suma puede indicar el resultado y la acción, no es fácilmente apreciada por los estudiantes aunque estas dos nociones sean necesarias para el conocimiento en álgebra. Por ejemplo, en álgebra, en la expresión $5+d$ el signo “+” indica proceso de sumar 5 a d , el símbolo “+” expresa aquí la relación entre dos conjuntos de valores, el que está representado por d y el que está representado por $5+d$. Con esto no se expresa un único resultado sino todos los resultados. En este caso sí tiene sentido dejar la operación indicada.

En la tabla 9.3 se presenta la configuración cognitiva asociada al ítem 1, dicha configuración es la suma de ideas del 43% de los estudiantes que contestaron bien el ítem.

Tabla 9.3: Configuración cognitiva asociada al ítem 1 del cuestionario cognitivo

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 1	
Situación-Problema:	
Si a 4 le sumo n puede escribirse como $n+4$. Sume 4 a $3n$. (Justifique su respuesta).	
Lenguaje:	
Lenguaje verbal: sumo; sume, ley de composición interna, operación binaria, números enteros, números reales, propiedades de los números reales, valor absoluto de un número, variable, constante, expresión algebraica, monomio, binomio, signos de agrupación. Lenguaje simbólico: $+: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; 4; n+4; 3n; ()$; $a+b=b+c$; $(4)+(3n)=4+3n$; $4+3n=3n+4$.	
Definiciones-Conceptos:	
Previos: • Suma de números • Signos de agrupación: el paréntesis • La adición es conmutativa • La adición es asociativa • 0 es el neutro aditivo o negativo de un número. • Valor absoluto de un cantidad	Emergente: • Términos algebraicos, elementos de un término. Grado de un término algebraico: grado absoluto y grado con relación a la letra. • Clases de términos: término entero. Monomio: $a_n x^n$; Binomio: $a_n + a_1 x^n$ • Reducción de términos semejantes. Suma de un entero con una expresión algebraica.

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 1	
Propiedades:	
Emergentes	
• La suma de dos números positivos siempre es igual a otro número positivo. • La suma de dos números siempre es conmutativa. • Introducción de cantidades en signos de agrupación: paréntesis. • Supresión de signos de agrupación: paréntesis. • La suma de un número entero con un monomio es igual a un binomio.	
Procedimiento:	
Previos:	
• Sume 4 a $3n$	
Emergente:	
• Identificación del número entero y el monomio. • Introducción del número entero y el monomio dentro de un signo de agrupación precedido del signo + se deja a cada una de las cantidades con el mismo signo que tengan. • Suprimir signos de agrupación precedidos del signo + se deja el mismo signo que tengan a cada una de las cantidades que se hallan dentro de él. • Sumar dos expresiones: una a continuación de la otra con sus propios signos y se reducen los términos semejantes si los hay.	
Argumentación:	
Si a 4 le sumo n puede escribirse como $n+4$. Sume 4 a $3n$.	
• La suma de un número entero con un monomio es igual a un binomio, por lo tanto $(4)+(3n)=4+3n$. • La suma de dos números positivos siempre es igual a otro número positivo, entonces $(4)+(3n)=4+3n$. • La suma siempre es conmutativa $a+b=b+c$, por lo que si sumo $4+3n=3n+4$. • $4+3n$ respuesta correcta sin justificación.	

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 9.4 podemos observar que la configuración cognitiva que más porcentaje tiene con una gran diferencia respecto de las demás, es aquella que aplica las definiciones de monomio y binomio con un 25,10% (configuración 1). Así, tal y como Cajaraville et al. (2012) refleja en sus investigaciones, cuando se trabaja con operaciones aritméticas y algebraicas se considera a la letra como un número desconocido, pero se puede operar con él. Esta afirmación se corrobora al ver la suma de los porcentajes obtenidos en las configuraciones 2 y 3, que sí tienen en cuenta la definición de suma de números positivos y la propiedad conmutativa, la cual se queda en un discreto 13,34%. Hay un 4,56% de estudiantes que respondieron correctamente, sin embargo, no justificaron sus respuestas (configuración 4).

Tabla 9.4: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 1 del cuestionario cognitivo

Nº	Configuración cognitiva	Frecuencia	Porcentaje
1	La suma de un número entero con un monomio es igual a un binomio, por lo tanto $(4)+(3n)=4+3n$.	220	25,10
2	La suma de dos números positivos siempre es igual a otro número positivo, entonces $(4)+(3n)=4+3n$.	60	6,84

Nº	Configuración cognitiva	Frecuencia	Porcentaje
3	La suma siempre es conmutativa $a+b=b+c$, por lo que si sumo $4+3n=3n+4$.	57	6,50
4	Respuesta correcta sin justificación $4+3n$	40	4,56
Total		377	43,00

Fuente: Elaboración propia.

En el análisis de este ítem se aprecia, en general, que son notables las respuestas de los estudiantes que expresan una interpretación diferente de lo que presenta el enunciado, observándose las dificultades que hay en la conversión y en la comprensión de los mismos. Al respecto de las dificultades en la conversión, Duval (1999) señala que radica porque ésta no se aprende con el maestro sino que requiere de toda una comprensión de las representaciones que están involucradas.

Análisis del ítem 2: Si n multiplicado por 4, puede escribirse como $4n$. Multiplique por 4 a $n+5$. (Justifica su respuesta)

En la tabla 9.5 presentamos el argumento correcto y los tipos de errores encontrados en el ítem 2. Un 45% de los estudiantes contestaron correctamente y la mayoría que lo hacen, argumentan con la propiedad distributiva aplicando un lenguaje verbal o simbólico aunque con notables diferencias en el grado de corrección en la expresión. El 55% representa los argumentos incorrectos y estos se clasifican en: un 3% error situacional (uso incorrecto del paréntesis); un 7% error conceptual (uso incorrecto de la definición de la propiedad distributiva); un 3% error procedimental (ignorar la variable); y un 42% de la respuesta incorrecta representa el tipo de error combinado: estos errores son el uso incorrecto del paréntesis, uso incorrecto de la propiedad distributiva e ignorar la variable.

Tabla 9.5: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 2 del cuestionario cognitivo

Tipo de respuesta	Subcategorías/Argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Argumento Correcto	$4(n+5)=4n+20$	394	45
Situacional	Uso incorrecto del paréntesis	26	3
Conceptual	Uso incorrecto de la propiedad distributiva	62	7
Procedimental	Multipliación 4 por 5 resultado 20	26	3
Combinados	Multipliación 4 por 5 posterior $20+n$	368	42
No contestan	No hay argumentos	0	0
Total		876	100

Fuente: Elaboración propia.

Los errores relativos al uso del paréntesis: no usar paréntesis donde es necesario o usarlo mal, pueden tener su origen o bien en ausencia de sentido, o bien en un obstáculo. Este tipo de error, en primer lugar, se relaciona con problemas de la aritmética no superados, y en segundo lugar con un obstáculo cognitivo relacionado con la forma de enseñanza del paréntesis (Socas, 2001). Al uso incorrecto de la propiedad distributiva se le atribuye el origen de la ausencia del sentido¹² y puede situarse en el ámbito estructural u operacional. Se trata de un error conceptual en el que los estudiantes usan inadecuadamente una propiedad conocida. El error se provoca porque los estudiantes tratan de distribuir la multiplicación respecto a uno de los factores, en este caso el numérico. Posiblemente este tipo de error se produce por ignorar la variable “n” como uno de los sumandos para aplicar la propiedad distributiva, lo que implicaría un pensamiento numérico; se trataría de un error operacional (Socas et al. 1996). Es posible que este tipo de obstáculo esté motivado por la forma de enseñanza y aprendizaje de las propiedades de las operaciones básicas (conmutativa, asociativa, elemento neutro, distributiva, etc.).

Tradicionalmente, se enseñan todas las propiedades al mismo tiempo, sin hacer hincapié en cada una de ellas por separado y no se profundiza en la necesidad de la existencia de dos leyes de composición interna (+, •) para que se puede dar la propiedad distributiva, lo que puede llevar a combinarlas. En este caso, es posible que se haya confundido la propiedad distributiva con la asociativa del producto, o bien porque se introducen propiedades como extensión de las ya conocidas, lo que también genera confusión; si no se extrema el cuidado en el proceso de enseñanza-aprendizaje, se trataría de un error estructural (Soca, 2007). Por otra parte, se encontró un error de clausura que según Socas (2001) tiene su origen en un obstáculo cognitivo o bien en ausencia de sentido. Este error se refleja en el error procedimental y combinado, los estudiantes visualizan las expresiones algebraicas como enunciados incompletos y esto se enlaza con una falta de sentido de las operaciones con monomios. Esto se debe a que los estudiantes no encuentran sentido al uso del lenguaje algebraico en determinados contextos, no saben trabajar con las variables, ya que éstas no tienen significado para ellos, por lo que sólo trabajan con el lenguaje numérico.

En la tabla 9.6 se describe el resultado del análisis de la configuración cognitiva del ítem 2. Cabe mencionar que se analizó el 45% de las respuestas correctas de los estudiantes en términos de lenguaje, definiciones, propiedades, procedimientos y argumentaciones en la situación-problema propuestas para el ítem 2 (Si n multiplicado por 4, puede escribirse como $4n$. Multiplique por 4 a $n+5$).

¹² Los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido se originan en los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación.

Tabla 9.6: Configuración cognitiva asociada al ítem 2 del cuestionario cognitivo

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 2	
Situación-Problema:	
Si n multiplicado por 4, puede escribirse como $4n$. Multiplique por 4 a $n+5$. (Justifique su respuesta).	
Lenguaje:	
- Lenguaje verbal: multiplicado, multiplique, producto, ley de composición interna, operación binaria, número enteros, números reales, propiedades de los números reales, propiedad distributiva, paréntesis; monomio, binomio, polinomio, ley de los signos, ley de los exponentes, operaciones con polinomios; - Lenguaje simbólico: $\bullet, +: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \forall (x, y, z) \in \mathbb{R} \Rightarrow x \bullet (y + z) = xy + xz, + \bullet + = +; + \bullet - = -; - \bullet + = -; 4; 4n; n+5; (); 4n+20; (4) \bullet (n+20) = 4n+20; (4) \bullet (n+20) = (4 \bullet n) + (4 \bullet 5) = 4n+20; 4 \bullet (n+5) = 4n+20$	
Definiciones-Conceptos:	
Previos: - Suma de números - Multiplicación de números - Signos de agrupación: el paréntesis - La adición y multiplicación es conmutativa - La adición y multiplicación es asociativa 0 es el neutro aditivo o negativo de un número. 1 es el neutro multiplicativo de un número. - La adición se cumple la propiedad distributiva. - La multiplicación cumple con la propiedad distributiva - Valor absoluto de un cantidad	Emergente: - Términos algebraicos, elementos de un término. Grado de un término algebraico: grado absoluto y grado con relación a la letra. - Clases de términos: término entero. - Monomio: $a_n x_n$; binomio: $a_n + a_1 x^n$ - Reducción de términos semejantes. - Suma de un entero con una expresión algebraica. Multiplicación de un número entero con una expresión algebraica. - Uso del paréntesis; ley de los signos - Ley de los exponentes; operaciones con polinomios.
Propiedades:	
Emergentes - La multiplicación. - La multiplicación de monomios. - La multiplicación de monomios por binomios. - La multiplicación de dos polinomios	
Procedimiento:	
Previos: - Multiplique por 4 a $n+5$ Emergente: - Es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador, hallar una tercera cantidad, llamada producto, que sea respecto del multiplicando, en valor absoluto y signo, lo que el multiplicador es respecto de la unidad positiva. - Se multiplican los coeficientes y a continuación de este producto se escriben las variables de los factores en orden alfabético, poniéndose a cada variable un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores. El signo del producto vendrá dado por la ley de los signos. - Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta en cada caso la regla de los signos, y se separan los productos parciales con sus propios signos. Esta es la ley distributiva de la multiplicación. - Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la ley de los signos, y se reducen los términos semejantes.	

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 2

Argumentación:

Si n multiplicado por 4, puede escribirse como $4n$. Multiplique por 4 a $n+5$.

- Definición de multiplicación $4n+20$
- La multiplicación de monomios $(4) \cdot (n+20) = 4n+20$
- La multiplicación de monomios por binomios $(4) \cdot (n+20) = (4 \cdot n) + (4 \cdot 5) = 4n+20$
- Multiplicación de dos polinomios $4 \cdot (n+5) = 4n+20$

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla de frecuencia y porcentaje (Tabla 9.7) se hace referencia al resultado del análisis anterior. Se observa que la configuración más frecuente es “la multiplicación de monomios por binomios $(4) \cdot (n+20) = (4 \cdot n) + (4 \cdot 5) = 4n+20$ ”, lo que representaría que la atención a la hora de resolver la tarea está centrada principalmente en la multiplicación de monomios por binomios haciendo un buen uso conceptual y procedimental de la propiedad distributiva. Esta configuración es la que mejor argumenta y justifica la solución encontrada y posee un porcentaje de acierto del 20% del total de las respuestas correctas. La configuración cognitiva “definición de multiplicación $4n+20$ ”, aunque la respuesta es correcta, sólo argumenta una definición conceptual (multiplicación) y no justifica bien su respuesta. Es la segunda configuración más frecuente, 10%, a poca distancia de la configuración que representa el 9%, la cual define “la multiplicación de dos polinomios” y argumenta un procedimiento directo en el uso de la propiedad distributiva. A destacar, a su vez, que el 6% del total de las respuestas correctas se agrupan en la configuración concretada como “la multiplicación de monomios $(4) \cdot (n+20) = 4n+20$ ” con un buen uso del paréntesis y una distribución directa.

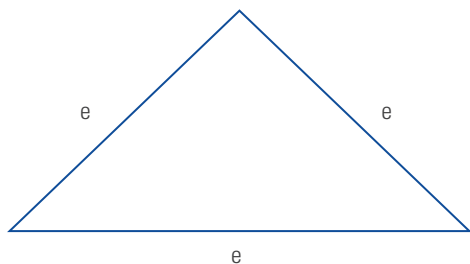
Tabla 9.7: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 2 del cuestionario cognitivo

Nº	Configuración cognitiva	Frecuencia	Porcentaje
1	Definición de multiplicación $4n+20$	88	10
2	La multiplicación de monomios $(4) \cdot (n+20) = 4n+20$	52	6
3	La multiplicación de monomios por binomios $(4) \cdot (n+20) = (4 \cdot n) + (4 \cdot 5) = 4n+20$	175	20
4	Multiplicación de dos polinomios $4 \cdot (n+5) = 4n+20$	79	9
Total		394	45

Fuente: Elaboración propia.

En resumen, las argumentaciones expresadas por los estudiantes consisten en un registro de representación que se caracteriza por la actividad cognitiva relacionada con el tratamiento de una representación, es decir, es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido transformada (Duval, 1993). Por tanto, es esencial que los estudiantes comprendan el significado de las variables.

Análisis del ítem 3: Calcule el perímetro de la siguiente figura. Justifique su respuesta.



En la tabla 9.8 presentamos los resultados del ítem 3. La argumentación correcta tiene una porcentaje del 46% lo que indica una buena interpretación de la situación y buen uso del concepto y procedimiento de la definición de perímetro. Aunque se encontraron errores situacionales referente a que los estudiantes “miden los segmentos de la figura” con un 9%. En un 16% de los casos aparecieron errores del tipo conceptual relativo al uso incorrecto de la definición de perímetro. También se encontraron errores del tipo procedimental donde los estudiantes evalúan a la variable dándole un valor numérico (10%). Y finalmente un 19% donde se manifiestan errores combinados (situacional, conceptual, procedimental).

Tabla 9.8: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 3 del cuestionario cognitivo

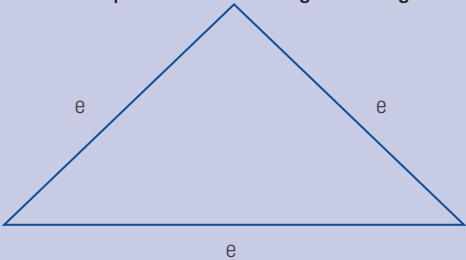
Tipo de respuesta	Subcategorías/Argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Argumento Correcto	$P=3e$	403	46
Situacional	Miden los segmentos de la figura	79	9
Conceptual	Uso incorrecto de la definición de perímetro e^3	140	16
Procedimental	Evalúan a e dándole un valor numérico	88	10
Combinados	Si $e=2$ entonces $p=e^3=2^3=8$	166	19
No contestan	No hay argumentos	0	0
Total		876	100

Fuente: Elaboración propia.

Los errores encontrados indican que los estudiantes evalúan a la variable no usándola o interpretándola como objeto, y que la estructura sólo involucra una operación. Esta operación es el cálculo del perímetro de una figura geométrica, en este caso de un triángulo, que involucra una sola operación. No obstante, existen errores semánticos, es decir, de escritura utilizada no convencional en el contexto del álgebra usual. Este error se debe a la tipología “e³” que fue interpretada como potencia, en algunos casos, y, en otros, como un contador de “e”: sumamos lados “e”, e más e, más e, en concreto tres e. Estos resultados se pueden explicar por problemas de aprendizaje y enseñanza del álgebra, es decir, una incomprensión sustentada en los errores situacional, conceptual y procedimental que se debe a que los estudiantes, por una parte, tienen ideas imprecisas sobre el objeto matemático y mezclan de forma incoherente diferentes representaciones semióticas (Socas, 2007), y por otra parte, a pesar de reconocer el sistema de representación, no realizan transformaciones en el interior del sistema de representación. En otras palabras, los errores de los estudiantes se sitúan en la etapa procedimental o estructural ya que usaron inadecuadamente conceptos y procedimientos en la situación dada.

A partir de lo anterior, se realizó la configuración cognitiva relacionada a este ítem, con el propósito de analizar las potencialidades del 46% de los argumentos correctos de los estudiantes.

Tabla 9.9: Configuración cognitiva asociada al ítem 3 del cuestionario cognitivo

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 3	
Situación-Problema:	
Calcule el perímetro de la siguiente figura. Justifique su respuesta. 	
Lenguaje:	
Lenguaje verbal: perímetro de un triángulo equilátero, perímetro de un triángulo isósceles, perímetro de un triángulo escaleno, perímetro de un triángulo rectángulo Lenguaje simbólico: $P=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n=\sum_{i=1}^n a_i$; $P=na$; $P=3l$; $P=2a+b$; $P=a+b+c$; $P=a+b+\sqrt{a^2+b^2}$	

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 3

Definiciones-Conceptos:

Previos:

- Polígono
- Triángulo
- Vértices
- Lados
- Ángulos interiores; tipos de triángulos.

Emergente:

- Perímetro de una figura.
- Perímetro: Triángulo equilátero
- Perímetro: Triángulo isósceles
- Perímetro: Triángulo escaleno
- Perímetro Triángulo rectángulo

Propiedades:

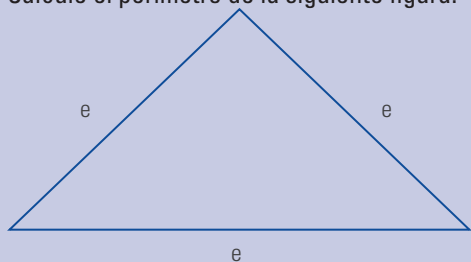
Emergentes

- El perímetro es la suma de las longitudes de los lados de una figura geométrica.
- En un triángulo equilátero sus tres lados iguales, por lo que su perímetro será tres veces la longitud de uno de sus lados.
- En un triángulo isósceles su dos lados iguales y uno diferente, por lo tanto su perímetro será dos veces los lados iguales más el lado desigual.
- En un triángulo escaleno sus tres lados desiguales. Por consiguiente su perímetro es la suma de éstos tres.
- En un triángulo rectángulo uno de sus ángulos es recto, por tanto, su perímetro se puede calcular a partir de la suma de sus lados, igualmente, si se conocen dos de sus lados (catetos) se puede calcular a través del teorema de Pitágoras, es decir la hipotenusa se puede expresar en función de sus catetos.

Procedimiento:

Previos:

Calcule el perímetro de la siguiente figura.



Emergente:

- Constatar el dominio para aplicar la fórmula de perímetro de figuras geométricas en la resolución de problemas.
- Verificar la habilidad de plantear y resolver problemas que involucren el cálculo de perímetros en figuras geométricas.

Argumentación:

- Definición de perímetro: $P=na \Rightarrow$ Si $n=3$ y $a=e$ entonces $P=3e$
- Definición de perímetro de un triángulo equilátero: $P=3l \Rightarrow$ Si $l=l=l$, por consiguiente $l=e$ entonces $P=3e$.
- Definición de perímetro de un triángulo escaleno: Si $P=a+b+c$ y $a=e; b=e; c=e$; entonces $P=e+e+e=3e$.
- Argumento correcto sin justificación $P=3e$.

Fuente: Elaboración propia.

A partir de la configuración cognitiva del ítem 3, se presenta en la tabla la frecuencia y porcentaje (Tabla 9.10) de los tipos de configuraciones cognitivas utilizadas por los estudiantes universitarios en el momento de resolver el ítem.

Tabla 9.10: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 3 del cuestionario cognitivo

Nº	Configuración cognitiva	Frecuencia	Porcentaje
1	Si $P=na \Rightarrow$ Si $n=3$ y $a=e$ entonces $P=3e$	131	15
2	Si $P=3l \Rightarrow$ Si $l=l=l$, por consiguiente $l=e$ entonces $P=3e$.	70	8
3	Si $P=a+b+c$ y $a=e; b=e; c=e$; entonces $P=e+e+e=3e$.	123	14
4	Argumento correcto sin justificación $P=3e$.	79	9
Total		403	46

Fuente: Elaboración propia.

Encontramos que la configuración cognitiva más frecuente es la concerniente a la argumentación “Si $P=na \Rightarrow$ Si $n=3$ y $a=e$ entonces $P=3e$ ” relacionada a la definición de perímetro de una figura geométrica, con un 15%. Seguida de la configuración que los estudiantes definen “Si $P=a+b+c$ y $a=e; b=e; c=e$; entonces $P=e+e+e=3e$ ” relativa al concepto de perímetro de un triángulo escaleno, con un 14%. Ambas configuraciones representan el 29% del total de los argumentos correctos. Por otra parte, algunos estudiantes contestaron este ítem con una configuración “Si $P=3l \Rightarrow$ Si $l=l=l$ ”, por consiguiente $l=e$ entonces $P=3e$, que se asocia a la definición de triángulo equilátero, siendo ésta la argumentación más correcta por definición; sin embargo, alcanzó una proporción del 8% con respecto a los argumentos correctos. Y finalmente, el 9% de los estudiantes contestaron directamente con un argumento correcto sin justificación $P=3e$.

En definitiva, los estudiantes que contestaron bien presentaron buenos argumentos que justifican su proceso para resolver dicho problema lo que significa que pueden trabajar correctamente en la conversión de una representación; dicho de otra manera, los estudiantes pueden realizar correctamente actividades de conversión de un sistema de representación semiótico a otro (Duval, 1993). Esto es así porque los estudiantes dominan conceptos, propiedades y procedimientos del sistema de representación semiótico lo que facilita la conversión al otro sistema.

Análisis del ítem 8: Cuando son verdaderas las siguientes expresiones: $L+M+N=L+P+N$ Escribe una x en la respuesta según tu criterio justifique. Siempre (___). Nunca (___). Algunas veces (___). Cuando..(___).

Las respuestas de los estudiantes se clasificaron en un 46% de argumentos correctos y un 54% en argumentos incorrectos. Los argumentos incorrectos se subdividen en los tipos de errores situacional, conceptual, procedimental, combinados y no contestan. El error más frecuente es el combinado con un 17%. Esto se debe a que los estudiantes asu-

men que $L+M+N$ siempre es igual a $L+P+N$ cuando M y P tienen el mismo valor. Y este error se ratifica con el 15% del uso incorrecto de la propiedad conmutativa que es un error conceptual y el error del tipo situacional donde los estudiantes asumen que $M \neq P$, por tanto, nunca se cumple la condición. Así mismo, se corrobora con el 10% del error procedimental donde se iguala al valor cero a las variables M y P , es decir, cuando $M=0$ y $P=0$ entonces $L+N=L+N$. Finalmente, un 5% del total de los estudiantes no argumentó o no contestaron a este ítem. Véase tabla 9.11.

Tabla 9.11: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 8 del cuestionario cognitivo

Tipo de respuesta	Subcategorías/Argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Argumento Correcto	Algunas veces $M=P$	403	46
Situacional	Nunca porque $M \neq P$	61	7
Conceptual	Uso incorrecto de la propiedades aditivas	131	15
Procedimental	Cuando $M=0$ y $P=0$ entonces $L+N=L+N$	88	10
Combinados	$L+M+N$ Siempre es igual a $L+P+N$ cuando M y P tienen el mismo valor.	149	17
No contestan	No hay argumento	44	5
Total		876	100%

Fuente: Elaboración propia.

Los errores encontrados del tipo situacional, conceptual y procedimental confirman el error combinado. Esto se debe a que es difícil para los estudiantes pasar de la interpretación de un único valor a la interpretación de varios valores posibles (Palarea & Socas, 1998). En todo caso, estos estudiantes no han llegado a superar la concepción del valor único para la letra, a favor de la concepción del valor múltiple, que es necesaria para las desigualdades. En general, los estudiantes usan los términos o letras mucho antes de ser capaces de conceptualizarlos como variables (esto es, de percibir lo general en lo particular). Esta dificultad de conceptualización está relacionada con el desarrollo de la estructura cognitiva de generalización, es decir, con la comprensión de las letras como números generalizados.

Lo mencionado anteriormente permitió realizar un análisis de las configuraciones cognitivas realizadas por los estudiantes universitarios, resumidos en el 46% de los argumentos correctos en este ítem.

Tabla 9.12: Configuración cognitiva asociada al ítem 8 del cuestionario cognitivo

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 8				
Situación-Problema:				
Cuándo son verdaderas las siguientes expresiones. Escribe una x en la respuesta según tu criterio justifique.				
Expresión	Siempre	Nunca	Algunas veces	Cuando...
$L+M+N=L+P+N$				

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 8

Lenguaje:

- Lenguaje verbal: letras, variables, suma, añadir, adición, estructura aditiva, letras, variable, paréntesis, operación, números reales, propiedad conmutativa, propiedad asociativa, propiedad cancelativa, sustracción, sustraendo, minuendo, diferencia, ecuación, valor numérico.
- Lenguaje simbólico: $+:R \rightarrow R; \forall (x,y,z) \in R \Rightarrow x+y=y+x; x+(y+z)=(x+y)+z, x+z=y+z \Rightarrow x=y, -(x+z)-(y+z)=x-y, L+M+N=L+P+N$

Definiciones-Conceptos:

Previos:

- Sistema de numeración decimal
- Suma y resta.
- Ley de los signos

Emergente:

- Adición, sustracción,
- Sumandos, sustraendo, minuendo diferencia. Sumas y restas equivalentes

Propiedades:

Emergentes

- La suma es una operación interna: Existencia del neutro; Conmutativa (adición); Asociativa (adición); Cancelativa
- El total de una suma siempre es mayor que los sumandos (si estos son diferentes de ceros).
- $-(x+z)-(y+z)=x-y$
- La diferencia siempre es menor que el minuendo (si el sustraendo es diferentes de cero).
- Relación entre diferencia, sustraendo y minuendos: $S-M=D; S=D+M; S-D=M$
- Valor numérico de una expresión. Propiedades de las ecuaciones de primer grado.
- Signos iguales se suman y se pone el mismo signo; signo diferentes se restan y se escribe el signo del número mayor.

Procedimiento:

Previos:

Cuando son verdaderas las siguientes expresiones. Escribe una x en la respuesta según tu criterio justifique.

Expresión	Siempre	Nunca	Algunas veces	Cuando...
$L+M+N=L+P+N$				

Emergente:

- Descontextualización del enunciado del problema.
- Contextualización de enunciados descontextualizados
- Aplicar algoritmos de la suma
- Utilización de las propiedades conmutativa y asociativa para realizar la operación más fácilmente.
- Resolución de problemas en contexto aditivo

Argumentación:

- $\forall (L,M,N,P) \in R$ se cumple que $L+(N+M)=(L+P)+N$ donde $L=0$ entonces $0+(M+N)=(0+M)+N$ entonces $M+N=P+N$ por lo que la ley de cancelación en adición asumen que $M+N=P+N$ es igual a $N+M=N+P$ entonces $M=P$ si y solo si $N \in R$.
- $\forall (L,M,N,P) \in R$: Si $L=0$ se cumple que $M+N=P+N$ es igual a $N+M=N+P$ entonces $M=P$ si y solo si $N \in R$.
- $L=0$ entonces $M=N$ y $P=N$ entonces $M+P=N+N$ y $M-N=P-N$ por lo tanto: $M=P$.
- Argumento sin justificación algunas veces $M=P$.

Fuente: Elaboración propia.

La tabla 9.13 muestra las configuraciones cognitivas más frecuente por parte de los estudiantes universitarios al resolver este ítem. Sobresale, con un 18%, la configuración donde sólo se expresó que $M=P$ sin justificación alguna de este resultado. Con un 13% se encuentra la configuración que le asocia un valor numérico a “L” y posteriormente se realiza una argumentación con la propiedad asociativa y cancelativa con respecto a la adición de los números reales. Mientras que un 10% de las respuesta repite la asignación de valor numérico a “L” y utiliza la propiedad cancelativa para realizar dicha argumentación. Y, finalmente, un 5% de las respuestas se centra en una argumentación de relaciones entre variables, pero siempre asignando un valor numérico a “L”.

Tabla 9.13: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 8 del cuestionario cognitivo

Nº	Configuración cognitiva	Frecuencia	Porcentaje
1	$\forall(L,M,N,P) \in \mathbb{R}$ se cumple que $L+(N+M)=(L+P)+N$ donde $L=0$ entonces $0+(M+N)=(0+M)+N$ entonces $M+N=P+N$ por lo que la ley de cancelación en adición asumen que $M+N=P+N$ es igual a $N+M=N+P$ entonces $M=P$ si y solo si $N \in \mathbb{R}$.	114	13
2	$\forall(L,M,N,P) \in \mathbb{R}$: Si $L=0$ se cumple que $M+N=P+N$ es igual a $N+M=N+P$ entonces $M=P$ si y solo si $N \in \mathbb{R}$.	88	10
3	$L=0$ entonces $M=N$ y $P=N$ entonces $M+P=N+N$ y $M-N=P-N$ por lo tanto: $M=P$.	44	5
4	Argumento sin justificación algunas veces $M=P$.	157	18
Total		403	46

Fuente: Elaboración propia.

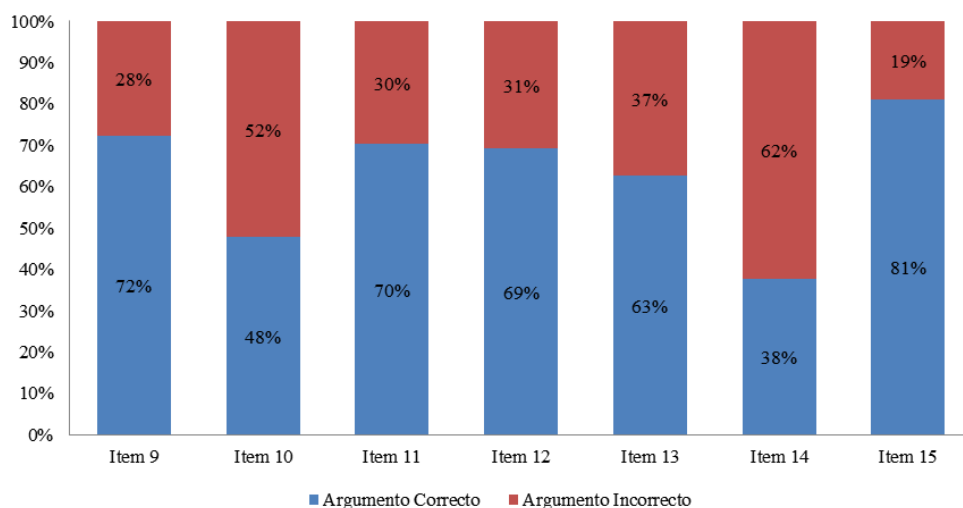
Estos argumentos correctos no permiten afirmar que los estudiantes han sido competentes al realizar un tratamiento de una representación; es decir, los estudiantes son capaces de realizar la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formado (Duval, 1993). Esto se debe que los estudiantes que argumentaron correctamente interrelacionaron los conceptos dentro de la estructura de la situación problema que estaban realizando, con fundamentos sólidos de los conceptos y las propiedades de adición y sustracción. Esto pone de manifiesto una sólida formación en las operaciones aritméticas. Simplificando, estos resultados muestran que los estudiantes pueden hacer generalizaciones, lo que indica que han adquirido un nivel de comprensión tal que les permite ver las variables como números generalizados.

9.2.2 Nivel 2 de complejidad en los procesos de resolución de problemas matemáticos

En la figura 9.2 podemos observar los porcentajes de argumentos correctos y argumentos incorrectos del segundo nivel de complejidad en los procesos de resolución

de problemas matemáticos. Encontramos que el porcentaje de argumentos incorrectos oscila entre el 19% y 62%. Por tal razón se analizarán aquellos ítems que presentan mayor complejidad para los estudiantes universitarios, es decir, los ítems 10 y 14 que alcanzaron puntuaciones incorrectas del 52% y el 62% respectivamente.

Figura 9.2: Porcentajes de respuestas de los ítems que constituyen el segundo nivel de complejidad



Fuente: Elaboración propia.

Análisis del ítem 10: Una manzana cuesta C\$ 150 y una pera C\$ 200. Si x es el número de manzana y el número de pera compradas. ¿Qué representa la expresión $150x+200y$? ¿Por qué?”

Al plantear el problema sobre “Una manzana cuesta C\$ 150 y una pera C\$ 200. Si x es el número de manzanas e el número de peras compradas. ¿Qué representa la expresión $150x+200y$? ¿Por qué?”, observamos en la tabla 9.14 la existencias de argumentos correctos en el 48% del total de estudiantes. A pesar de ello, existe un 52% que contestaron incorrectamente. Este porcentaje se subdivide en un 12% de argumentos situacionales que hacen referencia a que representa “150 manzanas y 200 peras”, un 7% de estos errores se deben al uso incorrecto de la definición de ecuación, mientras que un 10% a realizar un procedimiento de suma de los datos justificando esta respuesta como 350 frutas. Por último, un 23% a errores combinados (situacional, conceptual y procedimental) los cuales realizan lo siguiente “150 manzanas + 200 peras = 350 frutas”.

Tabla 9.14: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 10 del cuestionario cognitivo

Tipo de respuesta	Subcategorías/Argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Argumento Correcto	La relación de costo de las manzanas y peras	420	48
Situacional	150 manzanas y 200 peras	105	12
Conceptual	Uso incorrecto de la definición de ecuación	61	7

Tipo de respuesta	Subcategorías/Argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Procedimental	350 frutas.	88	10
Combinados	150 manzanas+200 peras=350 frutas	202	23
No contestan	Sin argumentos	0	0
Total		876	100

Fuente: Elaboración propia.

Las tipologías de errores (situacionales, conceptuales, procedimentales y combinados) encontradas nos indican que los estudiantes interpretan a las frutas como un objeto y que, además de interpretarlas como objetos, llevan a cabo una cierta evaluación de las mismas. Estas dificultades se asocian a problemas de transición del lenguaje natural al lenguaje algebraico, lo que causa que los estudiantes no realicen una transformación adecuada ya que no le encuentran sentido al uso del lenguaje algebraico en determinados contextos. No saben trabajar con las letras porque éstas no tienen significado para ellos, por lo que necesitan retroceder al uso del lenguaje numérico, particularizando las expresiones (Socas, 2007). En concreto, estos errores se justifican por el mal uso de la conversión de una representación, que para Duval (1993) es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

A continuación se presenta la configuración cognitiva referente a este ítem en términos de lenguaje, definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos que ostentan en una situación-problema.

Tabla 9.15: Configuración cognitiva asociada al ítem 10 del cuestionario cognitivo

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 10	
Situación-Problema:	
“Una manzana cuesta C\$ 150 y una pera C\$ 200. Si x es el número de manzana y y el número de pera compradas. ¿Qué representa la expresión $150x+200y$? ¿Por qué?”	
Lenguaje:	
- Lenguaje verbal: número de manzana, número de pera, suma, adición, símbolos monetarios, moneda córdoba, costo (cuesta), compra, representación, expresión, ecuación, identidad, relación, - Lenguaje simbólico: C\$; 150; 200; x; y; +; $150x+200y$; $ax+by=c$; $\forall(a,b) \neq 0$;	
Definiciones-Conceptos:	
Previos: - Suma y Multiplicación - Expresiones Algebraicas; Identidad; Igualdad - Relación de dependencia - Ecuación de primer grado con una incógnita - Ecuaciones equivalentes	Emergente: - Proposición - Función proposicional - Ecuación de primer grado con dos incógnitas - La igualdad como equivalencia - Ecuación indeterminada

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 10

Propiedades:

Emergentes

- Llamamos variable a la letras x e y en el enunciado, y función proposicional (sentencia abierta) a la proposición completa.
- Cada uno de los valores que pueden tomar la variable x e y para hacer verdadera la proposición es una solución de dicha sentencia.
- Conjunto de sustitución de la función proposicional es el conjunto de todos los posibles valores que pueden tomar las variables en ella.
- Conjunto de validez (o conjunto solución) de una función proposicional son aquellos valores del conjunto de sustitución para los que es verdadera.
- Resolver dicha función proposicional es encontrar su conjunto solución.
- Cuando la sentencia incluye el signo “=” se llama ecuación, y si incluye algunos de los símbolos; $\neq, <, >, \leq, \geq$, se llama inecuación o desigualdad.
- Toda Ecuación de primer grado con dos variables es una ecuación indeterminada
- Una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.
- Dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Procedimiento:

Previos:

“Una manzana cuesta C\$ 150 y una pera C\$ 200. Si x es el número de manzana y y el número de pera compradas. ¿Qué representa la expresión $150x+200y$? ¿Por qué?”

Emergente:

- Buscar las relaciones matemáticas entre las cantidades conocidas y desconocidas. Algunas palabras proporcionan claves lingüísticas de posibles igualdades y operaciones.
- Escribir las relaciones mediante expresiones algebraicas.
- Tratar de escribir alguna cantidad de dos maneras distintas, lo que producirá una ecuación.
- Traducir la solución matemática encontrada al lenguaje original del problema.
- Evaluar la solución.

Argumentación:

- La relación de costo de manzanas y peras.
- $150x+200y$ representa la solución matemática encontrada entre la relación de costo de manzanas y peras.
- $150x+200y$ si igualamos a cero $150x+200y=0$ y despejamos y , $y=-4/3 x$, establecemos que el valor de y depende del valor x . Por tanto $150x+200y$ representa la relación de costo de manzanas y peras.
- Representa la relación de costo de manzanas y peras, ya que si igualamos a cero la expresión $150x+200y=0$, obtenemos las expresiones “ $x=-4/3 y$ ” y “ $y=-3/4 x$ ” entonces sustituyendo esos valores para y encontramos que $y=-3/4 (-4/3 x) \Rightarrow y=x$, por lo tanto, se observa la relación de que el valor y depende del valor x .

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla de frecuencias y porcentajes de argumentos correctos (Tabla 9.16), se presentan los tipos de configuraciones cognitivas que realizaron los estudiantes universitarios. La configuración cognitiva con más porcentaje es aquella en la que los estudiantes asocian “la relación de costo de manzanas y peras”, con 17%. Le sigue la configuración cog-

nitiva con el argumento de que “ $150x+200y$ representa la solución matemática encontrada entre la relación de costo de manzanas y peras”, con 12%. Las configuraciones cognitivas (3) y (4) suman, entre ambas, un 19% de los argumentos correctos, lo que indica el dominio estructural, conceptual y procedimental de los objetos matemáticos primarios que emergen para poder darle solución a esta situación-problema a la que fueron sometidos.

Tabla 9.16: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 10 del cuestionario cognitivo

Nº	Configuración cognitiva	Frecuencia	Porcentaje
1	La relación de costo de manzanas y peras.	149	17
2	$150x+200y$ representa la solución matemática encontrada entre la relación de costo de manzanas y peras.	105	12
3	$150x+200y$ si igualamos a cero $150x+200y=0$ y despejamos y , $y=-4/3 x$, establecemos que el valor de y depende del valor x . Por tanto $150x+200y$ representa la relación de costo de manzanas y peras.	79	9
4	Representa la relación de costo de manzanas y peras, ya que si igualamos a cero la expresión $150x+200y=0$, obtenemos las expresiones “ $x=-4/3 y$ ” y “ $y=-3/4 x$ ” entonces sustituyendo esos valores para y encontramos que $y=-3/4 (-4/3 x) \Rightarrow y=x$, por lo tanto, se observa la relación de que el valor y depende del valor x .	87	10
Total		420	48

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados encontrados en los argumentos correctos permiten afirmar que este 48% de estudiantes universitario, efectúan la transformación de un registro de representación semiótico (Duval, 1993); es decir, la traducción del lenguaje natural y la relación con el lenguaje matemática usado (configuración cognitiva 1 y 2). También observamos que los estudiantes son capaces de realizar una conversión en el sistema de representación usado sin cambiar el registro de representación suministrado en la situación problema. Además de realizar una conversión en el registro de representación, estos estudiantes pueden aplicar un tratamiento en dicho registro manteniendo la relación de representación semiótica (configuración cognitiva 3 y 4). En resumen, los estudiantes son eficientes en identificar la transformación, en realizar una conversión y hacer un tratamiento en el registro de representación lo que indica un umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas y, específicamente, del álgebra.

Análisis del ítem 14: ¿Qué puede decirse acerca de r si $r=s+t$ y $r+s+t=30$? (Justifique su respuesta).

La tabla 9.17 muestra los resultados de argumentos correctos y argumentos incorrectos. Los argumentos correctos se concentran en un 38% de las respuestas de los estudiantes. Mientras que los argumentos incorrectos representan el 62%. Estos últimos se clasifican en subcategorías como situacional, conceptual, procedimental y combinados: el 9% se debe a un error tipo situacional, por ejemplo: " $r=30-s-t$ "; un 12% es un error conceptual, se debe al uso incorrecto de las "definiciones de identidad, equivalencia, relación de dependencia y ecuación"; un 14% de los errores son del tipo procedimental donde los estudiantes asignan valores a $s=10$ y $t=10$ y argumentan su respuesta como $r=30-s-t \Rightarrow r=30-10-10 \Rightarrow r=10$. Finalmente, un 27% son errores combinados, como se refleja en el siguiente argumento: $r=10$, por tanto $r<30$.

Tabla 9.17: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 14 del cuestionario cognitivo

Tipo de respuesta	Subcategorías/Argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Argumento Correcto	15	333	38
Situacional	$r=30-s-t$	79	9
Conceptual	Uso incorrecto de la definiciones de identidad, equivalencia, relación de dependencia y ecuación.	105	12
Procedimental	$s=10; t=10 \Rightarrow r=30-s-t \Rightarrow r=30-10-10 \Rightarrow r=10$	123	14
Combinados	$r=10$ por tanto, $r<30$	236	27
No contestan	No hay argumento.	0	0
Total		876	100

Fuente: Elaboración propia.

Las dificultades se centran en que los estudiantes consideran a la letra como un número desconocido pero específico, y pueden operar sobre él directamente. Para Duval (1993), en esta situación-problema hay un único cambio de representación en la conversión, mientras que en el tratamiento hay una secuencia de varias transformaciones. Pero, muy a menudo, la conversión y el tratamiento están totalmente entrelazados en el mismo proceso matemático de resolución (Duval, 1993). En general, se atribuye como origen de los errores conceptuales, situacionales y combinados a la ausencia del sentido y puede situarse en el ámbito estructural u operacional. Se trata de un error conceptual o de procedimientos

cuando los estudiantes usan inadecuadamente los conceptos, propiedades y procedimientos conocidos. Por otra parte, se realizó un análisis de los argumentos correctos, véase tabla 9.18.

Tabla 9.18: Configuración cognitiva asociada al ítem 14 del cuestionario cognitivo

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 14	
Situación-Problema:	
¿Qué puede decirse acerca de r si $r=s+t$ y $r+s+t=30$? (Justifique su respuesta)	
Lenguaje:	
Lenguaje verbal: variables, letras, suma, resta, multiplicación, división, inverso multiplicativo, términos, términos semejantes, paréntesis, incógnita, reducción de términos, transposición de términos, signos de relación, relación, identidad, igualdad, ecuación, relación de dependencia, ecuaciones equivalentes, proposición, función proposicional, conjunto solución, conjunto validez. Lenguaje simbólico: $=$; $+$; $-$; $\times$; $()$; $/$; $\div$; $<$, $>$; $ax=b$; r; $r=s+t$; $r+s+t=30$; $r=30-s-t$; 10;	
Definiciones-Conceptos:	
Previos: • Variable, letra, incógnita • Términos; paréntesis • Ley de Cancelativa (adición y multiplicación) • Transposición de términos • Reducción de términos semejantes • Inverso aditivo; inverso multiplicativo • Signos de relación • Identidad. Igualdad	Emergente: • Ecuación • Relación de dependencia • Ecuaciones equivalentes • Proposición • Función proposicional • Solución de la variable • Conjunto de sustitución. Conjunto de validez • Método de sustitución. Método de igualación
Propiedades:	
Emergentes • Llamamos variable a las letras r, s, t en el enunciado, y función proposicional a la proposiciones completa $r=s+t$ y $r+s+t=30$. • Cada uno de los valores que puede tomar la variable para hacer verdadera la proposición es una solución de dicha sentencia abierta. • Conjunto de validez (o conjunto solución) de una función proposicional son aquellos valores del conjunto de sustitución para los que es verdadera.	
Procedimiento:	
Previos: • ¿Qué puede decirse acerca de r si $r=s+t$ y $r+s+t=30$? (Justifique su respuesta) • Emergente: • Se reducen los términos semejantes, cuando es posible. • Se hacen la transposición de términos (aplicando inverso aditivo o multiplicativo) los que contenga la incógnita se ubican en el miembro izquierdo, y los que carezcan de ella en el derecho. • Se reducen términos semejantes, hasta donde es posible. • Se despeja la incógnita, dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita (inverso multiplicativo), y se simplifica.	

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 14

Argumentación:

- Si $r=s+t$ y $r+s+t=30$ entonces se puede decir también que $t=r-s$, por tanto se sustituyen en $r+s+(r-s)=30$ entonces reducimos la expresiones y obtenemos que $2r=30$ aplicamos inverso multiplicativo de 2: $1/2 (2r)=30(1/2)$ por tanto, $r=15$.
- Si $r=s+t$ y $r+s+t=30$ donde $r=30-s-t$ por igualación $s+t=30-s-t$ hacemos una transposición y reducimos términos $s+s+t+t=30$ entonces $2s+2t=30$ aplicamos la propiedad distributiva o factor común $2(s+t)=30$ entonces aplicamos el inverso multiplicativo de 2: $1/2 (2(s+t))=30(1/2)$ y encontramos que $s+t=15$ y como $r=s+t$ entonces $r=15$.
- r representa la relación entre s y t ya que los valores de r dependen de los valores de s y t , por ejemplo si en $r+s+t=30$, r toma los valores de $r=s+t$ se cumple que $s+t+s+t=30 \Rightarrow r=15$ por lo tanto se cumple la relación de dependencia.
- $r=15$ por tanto $r < 30$

Fuente: Elaboración propia.

Se encontraron cuatro configuraciones cognitivas concernientes a este ítem. La más relevante es la configuración 2, que representa el 13% de los argumentos correctos, y se centra en justificar la respuesta con el método de igualación. Después, le sigue la configuración cognitiva 1 que puntúa un 11%. Esta configuración se trata de una justificación con un método de sustitución. A continuación la configuración 4, con un 9%. Esta se define como un argumento directo. Finalmente, el 5% de los argumentos correctos se agrupan en la configuración cognitiva 3, que se asocia con un argumento sobre la relación de dependencia. Véase tabla 9.19.

Tabla 9.19: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 14 del cuestionario cognitivo

Nº	Configuración cognitiva	Frecuencia	Porcentaje
1	Si $r=s+t$ y $r+s+t=30 \Rightarrow t=r-s \therefore r+s+(r-s)=30 \Rightarrow 2r=30 \Rightarrow 1/2 (2r)=30(1/2) \therefore r=15$	96	11
2	Si $r=s+t$ y $r+s+t=30 \Rightarrow r=30-s-t \Rightarrow s+t=30-s-t \Rightarrow s+s+t+t=30 \Rightarrow 2s+2t=30 \Rightarrow 2(s+t)=30 \Rightarrow 1/2 (2(s+t))=30(1/2) \Rightarrow s+t=15$ y como $r=s+t$ entonces $r=15$.	114	13
3	r representa la relación entre s y t ya que los valores de r dependen de los valores de s y t , por ejemplo si en $r+s+t=30$, r toma los valores de $r=s+t$ se cumple que $s+t+s+t=30 \Rightarrow r=15$ por lo tanto se cumple la relación de dependencia.	44	5
4	$r=15$ por tanto $r < 30$	79	9
Total		333	38

Fuente: Elaboración propia

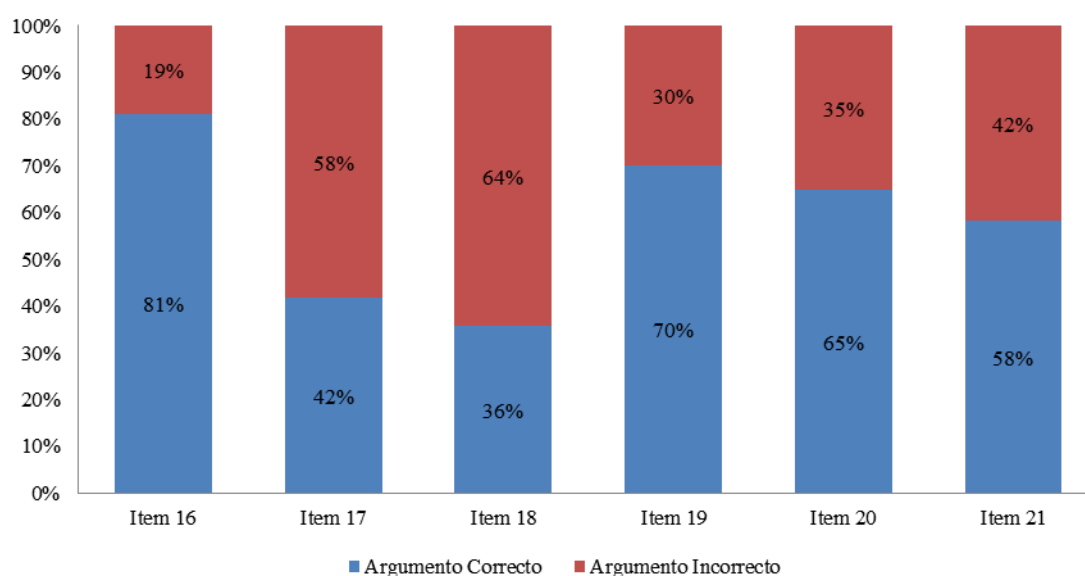
Los resultados que hemos hallados representan argumentos concretos que pueden describir los procesos matemáticos. Los estudiantes son capaces de formular, emplear e

identificar un registro de representación y, posteriormente, realizar un tratamiento en la representación; es decir, son competentes para hacer una transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada (Duval, 1993). Resumiendo, los estudiantes reconocen adecuadamente que las variables son números desconocidos aunque pueden operar con ellas directamente. En todo caso, los estudiantes pueden interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.

9.2.3 Nivel 3 de complejidad en los procesos de resolución de problemas matemáticos

En este nivel los argumentos incorrectos se agrupan en una frecuencia que oscila entre el 19% y el 64%. Observamos en la figura 9.3 que los ítems más complicados en este nivel son el ítem 17 con un 58% y el ítem 18 con un 64%. Por estas razones se realizó un análisis de los tipos de errores y configuraciones cognitivas asociadas a estos ítems.

Figura 9.3: Porcentajes de respuestas de los ítems que constituyen el tercer nivel de complejidad



Fuente: Elaboración propia.

Análisis del ítem 17: ¿Qué se puede decir de m si $m=3n+1$ y $n=4$? (Justifique su respuesta).

En este ítem encontramos que los argumentos correctos figuran el 42%, mientras que los argumentos incorrectos el 58%. Los argumentos incorrectos se clasificaron en situacional, conceptual, procedimental y combinados. El 10% es un error del tipo situacional: Se debe a la interpretación que los estudiantes le dan a las variables en el contexto de transición de la aritmética al álgebra. Un 13% son producto de un error del tipo conceptual, el cual tiene

que ver con un problema del uso incorrecto de la sustitución de una variable específica. El 15% se debe al error de tipo procedimental; es relativo a un mal proceso estructural y operacional. Finalmente, el 20% de los argumentos incorrectos se concentran en la combinación de los errores del tipo situacional, conceptual y procedimental. Véase la tabla 9.20.

Tabla 9.20: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 17 del cuestionario cognitivo

Tipo de respuesta	Subcategorías/Argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Argumento Correcto	$m=3(4)+1 \Rightarrow m=12+1 \therefore m=13$	368	42
Situacional	Interpretación incorrecta de la variable	88	10
Conceptual	Uso incorrecto de la definición sustitución	114	13
Procedimental	$m=3(4+1) \Rightarrow m=3(5) \therefore m=15$	131	15
Combinados	$m=3(4)+3(1) \Rightarrow m=12+3 \therefore m=15$	175	20
No contestan	No hay argumento.	0	0
Total		876	100

Fuente: Elaboración propia.

Los errores encontrados del tipo situacional, conceptual y procedimental, primeramente son producto de una carencia de los estudiantes en el desarrollo de las habilidades en Aritmética ya que no llegaron a asimilar las diferencias entre el signo igual, que se trabaja en aritmética, y el signo igual que se trabaja en álgebra. Esto ocurre, sobre todo, si se tiene en cuenta que cuando comienzan a resolver ecuaciones sencillas del tipo $c=ax \pm b$ el igual que aparece en esta situación tiene un parecido con el aritmético, mientras que con ecuaciones no triviales del tipo $ax \pm b=cx \pm d$ los estudiantes se ven obligados a relacionar el significado del signo igual aprendido en la aritmética¹³ con el signo igual aprendido en el álgebra¹⁴. Estas dificultades, para Kieran (1992), se deben a una problemática estructural que tiene que ver con las operaciones y relaciones de las expresiones algebraicas que hay en ambos lados de la igualdad, así como en las operaciones de relación y equilibrio que definen a una ecuación. En definitiva, la problemática se sitúa en no poder realizar una transformación de un registro de representación, es decir, los estudiantes no son competentes para llevar

¹³ El significado del signo igual en la aritmética hace referencia al uso del signo igual como un símbolo que separa una cadena o secuencia de operaciones, que se sitúan a la izquierda del signo igual y su resultado, que se dispone a la derecha, por ejemplo: $12+12=24$.

¹⁴ El significado del signo igual en el álgebra, lo encontramos en situaciones en las que el signo igual expresa una equivalencia sólo cierta para algún o algunos valores de las variables pudiendo no existir ninguno. Por ejemplo: $x^2+3x=x+1$.

a cabo una transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada (Duval, 1993).

En consecuencia, se realizó el análisis del 42% de los argumentos correctos en términos de los objetos primarios que hacen resurgir a una configuración cognitiva de alto nivel en este ítem.

Tabla 9.21: Configuración cognitiva asociada al ítem 17 del cuestionario cognitivo

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 17	
Situación-Problema:	
¿Qué se puede decir de m si $m=3n+1$ y $n=4$? (Justifique su respuesta)	
Lenguaje:	
- Lenguaje verbal: variables, letras, suma, resta, multiplicación, división, inverso multiplicativo, términos, términos semejantes, paréntesis, incógnita, reducción de términos, transposición de términos, signos de relación, relación, identidad, igualdad, ecuación, relación de dependencia, ecuaciones equivalentes, proposición, función proposicional, conjunto solución, conjunto validez. - Lenguaje simbólico: $=$; $+$; $\cdot$; $()$; $\therefore$; $\Rightarrow$; $c=ax+b$; n; m; $m=3n+1$; $n=4$;	
Definiciones-Conceptos:	
Previos: - Variable, letra, incógnita - Términos; paréntesis - Ley de Cancelativa (adición y multiplicación) - Transposición de términos - Reducción de términos semejantes - Inverso aditivo; inverso multiplicativo - Signos de relación - Identidad; Igualdad	Emergente: - Ecuación - Relación de dependencia - Ecuaciones equivalentes - Proposición - Función proposicional - Solución de la variable r - Conjunto de sustitución; Conjunto de validez - Método de sustitución; Método de igualación
Propiedades:	
Emergentes - Llamamos variable a las letras m,n en el enunciado, y función proposicional a la proposiciones completa $m=3n+1$. - Cada uno de los valores que puede tomar la variable m para hacer verdadera la proposición es una solución de dicha sentencia abierta. - Conjunto de validez (o conjunto solución) de una función proposicional son aquellos valores del conjunto de sustitución para los que es verdadera.	
Procedimiento:	
Previos: ¿Qué se puede decir de m si $m=3n+1$ y $n=4$? (Justifique su respuesta) Emergente: - Sustituir los valores numéricos asignados para las variables de una expresión - Se efectúa las operaciones aditiva y multiplicativa para la expresión indica. - Se establece la relación existen para con respecto al procedimiento indicado.	

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 17

Argumentación:

- Si $n=4$ entonces $m=13$
- m Representa la relación entre $3n+1$ ya que los valores de m depende de los valores de $3n+1$, si $n=4$ entonces $m=13$ por tanto se cumple la relación de dependencia.
- Si $n=4$ entonces $m=3(4)+1 \Rightarrow m=13$.
- Si $m=3n+1$ es una ecuación de la forma $c=ax+b, \forall (a,b) \in \mathbb{R}$ entonces los valores que tomen la variable x tendrá una influencia en los valores de c . Por tales razones si en $m=3n+1, n=4$ entonces $m=13$.

Fuente: Elaboración propia.

Se encontró cuatro configuraciones cognitivas a partir de los objetos primarios (situación-problema, lenguaje, definiciones-conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos). La configuración 3, se agrupa en un 15% de los argumentos correctos, con una explicación directa del procedimiento estructural u operacional para resolver la expresión, mientras que la configuración cognitiva 1, en el 12% de los argumentos correctos, con un proceso directo a través de una sustitución. Las configuraciones cognitivas 2 y 4 suman, entre ambas, un 15%; la configuración cognitiva 2 es un argumento concerniente a la relación de dependencia en una ecuación, y la configuración cognitiva 4 describe un proceso a partir de la definición de ecuación y la influencia de la variable. Véase la tabla 9.22.

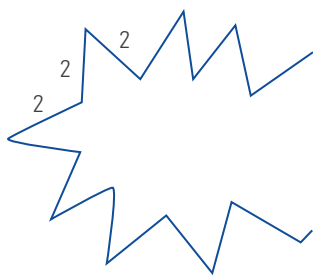
Tabla 9.22: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 17 del cuestionario cognitivo

Nº	Configuración cognitiva	Frecuencia	Porcentaje
1	Si $n=4$ entonces $m=13$	105	12
2	m Representa la relación entre $3n+1$ ya que los valores de m depende de los valores de $3n+1$, si $n=4$ entonces $m=13$ por tanto se cumple la relación de dependencia.	70	8
3	Si $n=4$ entonces $m=3(4)+1 \Rightarrow m=13$.	132	15
4	Si $m=3n+1$ es una ecuación de la forma $c=ax+b, \forall (a,b) \in \mathbb{R}$ entonces los valores que tomen la variable x tendrá una influencia en los valores de c . Por tales razones si en $m=3n+1, n=4$ entonces $m=13$.	61	7
Total		368	42

Fuente: Elaboración propia

Las configuraciones cognitivas encontradas demuestran que los estudiantes son capaces de utilizar los datos relevantes de la descripción de una situación compleja y realizar los cálculos correspondientes; es decir, los estudiantes poseen habilidades para comprender la letra como un número desconocido y pueden realizar operaciones con ella (Cajaraville et al. 2012). En síntesis, señalar que estos estudiantes tuvieron la destreza de realizar un tratamiento en un registro de representación, ya que llevaron a cabo una transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada (Duval, 1993).

Análisis del ítem 18: Parte de esta figura no está dibujada. Hay n lados de longitud. ¿Cuál es el perímetro? (Justifique su respuesta)



La tabla de frecuencia y porcentaje (Tabla 9.23) muestra que el 36% corresponde a los argumentos correctos y que el 64% restante son los argumentos incorrectos; y que estos se clasifican en errores del tipo situacional, conceptual, procedimental y combinados.

Tabla 9.23: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 18 del cuestionario cognitivo

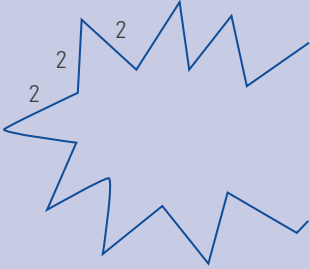
Tipo de respuesta	Subcategorías/Argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Argumento Correcto	$2n$	315	36
Situacional	Valor por la imagen visual que aporta la figura	149	17
Conceptual	Uso incorrecto de la definición de perímetro	123	14
Procedimental	$P=2+2+2=6n$	105	12
Combinados	$P=2n+12=14n$	184	21
No contestan	No hay argumentos	0	0
Total		876	100

Fuente: Elaboración propia.

Encontramos que el 17% corresponde al error tipo situacional; se produce porque los estudiantes argumentan su justificación con “valor por la imagen visual que aporta la figura”. El 14% es un error del tipo conceptual, se manifiesta por el uso incorrecto de la definición de perímetro de una figura geométrica. En un 12% el error es del tipo procedimental y se debe a la estructura u operación realizada en el cálculo del perímetro de la figura. Finalmente, el 21% se debe a la combinación de los errores anteriores (situacional, conceptual y procedimental). Esta problemática se presenta porque los estudiantes no pueden identificar, formular y emplear operaciones formales (Küchemann, 1981) para realizar un tratamiento y, posteriormente, una conversión en el registro de representación que figura la situación–problema.

En este contexto, se analizó los argumentos correctos, que representan el 36% de las respuestas correctas en este ítem. Véase la tabla 9.24.

Tabla 9.24: Configuración cognitiva asociada al ítem 18 del cuestionario cognitivo

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 18	
Situación-Problema:	
Parte de esta figura no está dibujada. Hay lados de longitud. ¿Cuál es el perímetro? (Justifique su respuesta) 	
Lenguaje:	
- Lenguaje verbal: Línea, segmento, línea poligonal, línea poligonal abierta, línea poligonal cerrada, poligonal cóncava, línea poligonal convexa, semiplano, figura plana, figura geométrica, perímetro, figura con agujeros, contorno de la figura (curvilínea y rectilínea), - Lenguaje simbólico: $P=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n=\sum_{i=1}^n a_i$; $P=na$; $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$; $A_1 A_2 A_3 A_4 \dots A_n = A_1 A_2 \cup A_2 A_3 \cup \dots \cup A_{n-1} A_n$; $A_1 \neq A_n$; $A_1 = A_n$;	
Definiciones-Conceptos:	
Previos: - Línea - Segmento - Polígono - Figura plana - Figura geométrica - Perímetro	Emergentes: - Línea poligonal: - Línea poligonal abierta; - Línea poligonal cerrada - Contorno de la figura (curvilínea y rectilínea) - Cóncava y convexa - Figura con agujeros
Propiedades:	
Emergentes - Si se considera $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$ puntos diferentes del plano, entonces el conjunto unión $A_1 A_2 A_3 A_4 \dots A_n = A_1 A_2 \cup A_2 A_3 \cup \dots \cup A_{n-1} A_n$ es una línea poligonal. - En el caso $A_1 \neq A_n$, esto puntos son los extremos de la poligonal abierta. - En el caso de que $A_1 = A_n$ la línea es cerrada. - Poligonal cóncava o convexa; semiplano. - El perímetro de una figura cualquiera lo constituye la longitud de la línea que describe el contorno de la figura y se expresa en unidades de medidas lineales.	
Procedimiento:	
Previos: Parte de esta figura no está dibuja. Hay n lados de longitud. ¿Cuál es el perímetro? (Justifique su respuesta) Emergente: - Determinamos la cantidad de lados de la línea poligonal. - Establecemos una variable para los n posibles lados de la línea poligonal. - Establecemos un patrón métrico si existe entre las líneas poligonales. - Finalmente establecemos una expresión algebraica en que puede determinarse el perímetro de dicho línea poligonal.	

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 18

Argumentación:

- Sin justificación $P=2n$.
- Sea n el número de lados que tiene la figura geométrica, como cada lado tiene un valor de 2 unidades, entonces podemos afirmar que: para saber el perímetro total de dicha figura es n veces multiplicado por el valor de cada uno de los lado entonces $2(n)=2n$.

Fuente: Elaboración propia.

La tabla 9.25 muestra la frecuencia y porcentaje de configuraciones cognitivas. Podemos observar que el 21% de los estudiantes contestaron directamente este ítem con una argumentación sin justificación, mientras que el 15% realizaron un proceso matemático a partir de la siguiente proposición: “Sea n el número de lados que tiene la figura geométrica, como cada lado tiene un valor de 2 unidades, entonces podemos afirmar que: para saber el perímetro total de dicha figura es n veces multiplicado por el valor de cada uno de los lado entonces $2(n)=2n$ ”. Esta configuración nos permite afirmar que los estudiantes están utilizando un sistema de constructo, que puede representar situaciones mediante símbolos, cumpliendo con axiomas conforme a definiciones precisas, incluyendo constructos matemáticos que pueden representar aspectos de otros constructos matemáticos.

Tabla 9.25: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 18 del cuestionario cognitivo

Nº	Configuración cognitiva	Frecuencia	Porcentaje
1	Sin justificación $P=2n$.	184	21
2	Sea n el número de lados que tiene la figura geométrica, como cada lado tiene un valor de 2 unidades, entonces podemos afirmar que: para saber el perímetro total de dicha figura es n veces multiplicado por el valor de cada uno de los lado entonces $2(n)=2n$.	131	15
Total		315	36

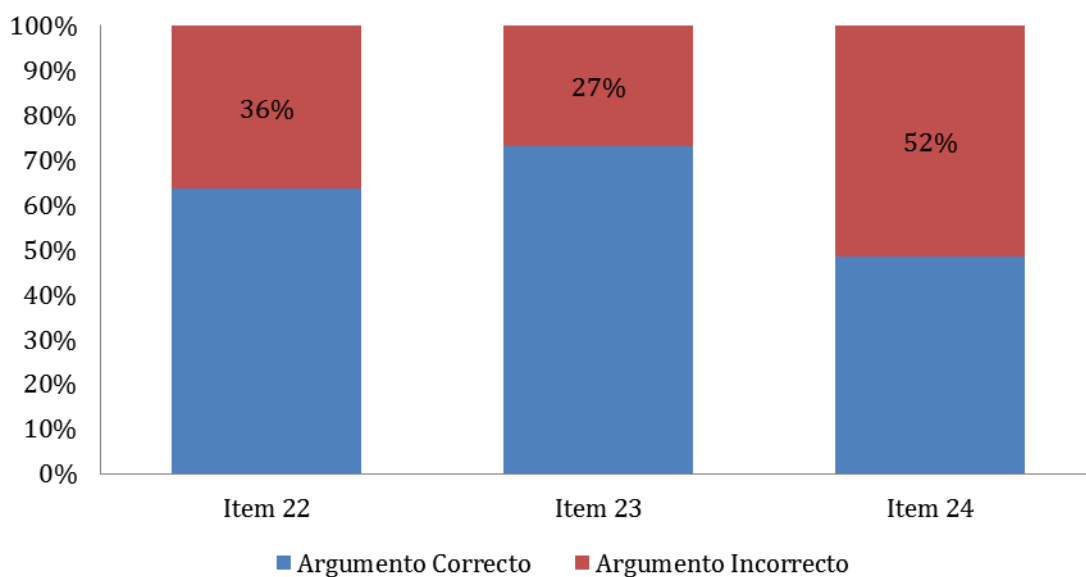
Fuente: Elaboración propia

Los resultados hacen referencia a que los estudiantes son capaces de realizar un tratamiento y conversión en el registro de representación visual geométrico, es decir, son competentes para interpretar elementos del registro de representación visual geométrico (Socas et al, 1996) y transformarlo a un sistema de registro de representación algebraico, permitiendo una comprensión conceptual y procedimental de la situación problema. En resumen, los estudiantes interpretaron el patrón numérico y posteriormente realizaron una generalización a través de la expresión de perímetro de una figura geométrica.

9.2.4 Nivel 4 de complejidad en los proceso de resolución de problemas

En la figura 9.4 se presentan los porcentajes de respuestas a los ítems que constituyen el cuarto nivel de complejidad en los procesos de resolución de problemas matemáticos. Se observa que el porcentaje de argumentos incorrectos oscila entre el 36% y 52%. Se han analizado los ítems 22 y 24, ya que han sido los ítems más complejos, para los estudiantes, en este nivel.

Figura 9.4: Porcentajes de respuestas de los ítems que constituyen el cuarto nivel de complejidad



Fuente: Elaboración propia

Análisis del ítem 22: ¿Cuál expresión es la mayor, $2n$ o $n+2$? (Justifique su respuesta).

La tabla de frecuencias y porcentajes de respuesta del ítem 22 (Tabla 9.26), muestra que el 64% son argumentos correctos, y el 36% son argumentos incorrectos. Los argumentos incorrectos se clasificaron en errores del tipo situacional, conceptual, procedimental y combinados. Los errores del tipo situacional representan el 5%; los estudiantes justificaron su respuesta con la expresión $2n$. En un 7% de los casos se produce un error de tipo conceptual que se debe al uso incorrecto de la definición de orden de los números reales. Un 13% muestra un error de tipo procedimental que se produce por la asignación de valores sin realizar una estructura operacional. Finalmente, el 11% de los estudiantes cometieron errores combinados (situacional, conceptual y procedimental) debidos a que los estudian-

tes argumentaron su respuesta de la siguiente manera: “los primeros términos de la serie numérica natural ($n=1,2,3$), sin considerar que en el caso de ($n=1$), $n+2$ es mayor que $2n$ y en el caso de $n=2$ ambas expresiones son iguales”.

Tabla 9.26: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 22 del cuestionario cognitivo

Tipo de respuesta	Subcategorías/Argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Argumento Correcto	$n+2 < 2n$	561	64
Situacional	$2n$	44	5
Conceptual	Uso incorrecto de la definición de orden	61	7
Procedimental	$2n$, cuando $n=1, 2, 3$.	114	13
Combinados	Los primeros términos de la serie numérica natural ($n=1,2,3$), sin considerar que en el caso de ($n=1$), $n+2$ es mayor que $2n$ y en el caso de $n=2$ ambas expresiones son iguales.	96	11
No contestan	No hay argumentos	0	0
Total		876	100

Fuente: Elaboración propia.

Las dificultades descritas anteriormente revelan que el concepto de variable implica, claramente, el conocimiento de la incógnita y de sus posibles valores. Para Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1996), estas dificultades están más allá de la comprensión de las letras como incógnitas específicas y como generalización de números. Así mismo, Küchemann (1981) señala que el uso y dominio del concepto de variable es difícil de comprender en toda exactitud, debido a que al concepto de variable se le puede dar varias interpretaciones, a menudo las interpretaciones de las variables se relacionan con la estructura implicada en los niveles de comprensión del álgebra¹⁵. Incluso dentro de la resolución de un mismo problema, el estudiante cambia de interpretación de la letra, lo que genera gran dificultad no solamente al observador sino también al mismo estudiante. En definitiva, los estudiantes presentan conflictos al realizar un tratamiento y una conversión en un registro de representación semiótico.

A continuación se presenta el análisis de la configuración cognitiva a partir del lenguaje, definición, propiedades, procedimientos y argumentos realizados por los estudiantes en la situación-problema. Véase la tabla 9.27.

¹⁵ Niveles de comprensión del álgebra que están relacionados con la estructura implicada (operaciones involucradas) y la naturaleza de los elementos con los que trabajan: bajo de las operaciones concretas, superior de las operaciones concretas, bajo de las operaciones formales y superior de las operaciones formales (Küchemann, 1981).

Tabla 9.27: Configuración cognitiva asociada al ítem 22 del cuestionario cognitivo

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 22		
Situación-Problema:		
¿Cuál expresión es la mayor, $2n$ o $n+2$? (Justifique su respuesta)		
Lenguaje:		
Lenguaje verbal: letras, variables, adición, multiplicación, mayor, menor, axiomas de orden, propiedades de los números de los reales, proposición, función proposicional, equivalencia, identidad, igualdad, ecuación, relación de dependencia, sentido de la desigualdad, desigualdad del mismo sentido, desigualdad de sentido contrario, propiedades de orden en los números reales. Lenguaje simbólico: $+$; $<$, $>$; $=$; $2n$; $n+2$; $n>2$; $n+2>2n$; $n<2$; $n+2=2n$; $n=2$; $a<c \Rightarrow a+c<b+c, a-c<b-c$; $a>b \Rightarrow a+c>b+c, a-c>b-c$; $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R} \Rightarrow$: Si $c(+)$ $a<b \Rightarrow ac<bc \wedge a/c<b/c$; Si $c(+)$ $a>b \Rightarrow ac>bc \wedge a/c>b/c$; Si $c(-)$ $a<b \Rightarrow ac>bc \wedge a/c>b/c$; Si $c(-)$ $a>b \Rightarrow ac<bc \wedge a/c<b/c$;		
	n	$n+2$
	$2n$	
	-1	1
	-2	
	0	2
	0	
	1	3
	2	
	2	4
	4	
	3	5
	6	
Definiciones-Conceptos:		
Previos: - Adición, sustracción, multiplicación y división. - Signos de relación, signo igual - Identidad; Igualdad - Relación de dependencia - Ecuación Emergentes: - Inecuación. - Sentido de la desigualdad - Desigualdad del mismo sentido, - Desigualdad del sentido contrario - Propiedad de orden de los números reales.		
Propiedades:		
Emergentes - Si $a<c \Rightarrow a+c<b+c \wedge a-c<b-c$ - Si $a>b \Rightarrow a+c>b+c \wedge a-c>b-c$ - Si $c(+)$ $a<b \Rightarrow ac<bc \wedge a/c<b/c$ la desigualdad no cambia - Si $c(+)$ $a>b \Rightarrow ac>bc \wedge a/c>b/c$ la desigualdad no cambia - Si $c(-)$ $a<b \Rightarrow ac>bc \wedge a/c>b/c$ la desigualdad cambia de orden - Si $c(-)$ $a>b \Rightarrow ac<bc \wedge a/c<b/c$ la desigualdad cambia de orden - Si $a<b$ y además $b<c$ entonces $a<c$ - Si $a<b$ entonces $a+c<b+c$ para toda $c \in \mathbb{R}$ - Si $a<b$ y $c>0$ entonces $ac<bc$		

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 22

Procedimiento:

Previos: ¿Cuál expresión es la mayor, $2n$ o $n+2$? (Justifique su respuesta)

Emergente:

- Hallar los valores de las incógnitas que satisfacen la inecuación
- Usar los axiomas de orden de los números reales
- Usar las propiedades de las desigualdades
- Transponiendo términos semejantes para después reducirlos
- Efectuar las operaciones indicadas

Argumentación:

- $n+2 < 2n$ cuando $n > 2$ ya que si $n=3$, entonces $3+2 < 2(3) \Rightarrow 5 < 6$
- $n+2 > 2n$ cuando $n < 2$ ya que si $n=-1, 0, 1$ entonces $-1+2 > 2(-1) \Rightarrow 1 > -2$; $0+2 > 2(0) \Rightarrow 2 > 0$; $1+2 > 2(1) \Rightarrow 3 > 2$
- $n+2 = 2n$ cuando $n=2$ ya que si $2+2 = 2(2) \Rightarrow 4 = 4$ por tales razones $n+2 > 2n$ cuando $n < 2$.
- $n+2 < 2n$ cuando $n > 2$; $n+2 > 2n$ cuando $n < 2$; $n+2 = 2n$ cuando $n=2$ y se comprueba en la siguiente tabla:

n	$n+2$	$2n$
-1	1	-2
0	2	0
1	3	2
2	4	4
3	5	6

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 9.28 se presentan las frecuencias y porcentajes de las configuraciones cognitivas encontradas a partir del análisis del 64% de los argumentos correctos.

Tabla 9.28: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 22 del cuestionario cognitivo

Nº	Configuración cognitiva	Frecuencia	Porcentaje
1	$n+2 < 2n$ cuando $n > 2$ ya que si $n=3$, entonces $3+2 < 2(3) \Rightarrow 5 < 6$	184	21
2	$n+2 > 2n$ cuando $n < 2$ ya que si $n=-1, 0, 1$ entonces $-1+2 > 2(-1) \Rightarrow 1 > -2$; $0+2 > 2(0) \Rightarrow 2 > 0$; $1+2 > 2(1) \Rightarrow 3 > 2$	149	17
3	$n+2 = 2n$ cuando $n=2$ ya que si $2+2 = 2(2) \Rightarrow 4 = 4$ por tales razones $n+2 > 2n$ cuando $n < 2$.	123	14
4	$n+2 < 2n$ cuando $n > 2$; $n+2 > 2n$ cuando $n < 2$; $n+2 = 2n$ cuando $n=2$ y se comprueba en una tabla	105	12
Total		561	64

Fuente: Elaboración propia

La configuración cognitiva 1 es la más frecuente con un 21%. Los estudiantes justificaron su respuesta a través de un argumento de una proposición sobre que $n+2 < 2n$, validándola con valores para cuando $n > 2$. Le sigue la configuración cognitiva 2, con un 17%. Acá los estudiantes argumentaron una proposición de que $n+2 > 2n$, comprobándola con valores para cuando $n < 2$. La configuración cognitiva 3 se inició con un argumento de que $n+2 = 2n$ cuando $n = 2$ y terminó la justificación de su respuesta con la proposición que “por tales razones $n+2 > 2n$ cuando $n < 2$ ”. Dicha configuración alcanzó el 14% de los argumentos correctos. Finalmente, un 12% de los estudiantes construyeron una configuración cognitiva a partir de las siguientes proposiciones $n+2 < 2n$ cuando $n > 2$; $n+2 > 2n$ cuando $n < 2$; $n+2 = 2n$ cuando $n = 2$ y la comprobaron en una tabla de valores.

La habilidad para resolver correctamente problemas de este tipo indica que el concepto de variable está claramente entendido. Los estudiantes consideran a las letras como una representación de un conjunto de valores no específicos, y realizan una relación sistemática entre dos conjuntos de valores. En concreto, los estudiantes son capaces de interpretar representaciones complejas para resolver un problema práctico; es decir, reconocen el registro de representación y, por consiguiente, realizan el tratamiento y la conversión de la representación de un registro de representación a otro (Duval, 1993).

Análisis del ítem 24: ¿Qué puede decirse acerca de c si $c+d=10$ y c es menor que d ? (Justifique su respuesta).

En la tabla de frecuencias y porcentajes (Tabla 9.29), se muestra que el 48% de los estudiantes universitarios justificaron correctamente su respuesta, mientras que el 52% presentaron errores del tipo situacional, conceptual, procedimental y combinados.

Tabla 9.29: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 24 del cuestionario cognitivo

Tipo de respuesta	Subcategorías/Argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Argumento Correcto	$c < 5$	420	48
Situacional	Tienen en cuenta la primera condición $c=5; d=5$	79	9
Conceptual	Valores negativos para c y positivos para d .	96	11
Procedimental	Diferentes valores para una misma letra	149	17
Combinados	Respuesta con un valor numérico	132	15
No contestan	No hay argumentos	0	0
Total		876	100

Fuente: Elaboración propia.

Se destaca el error de tipo procedimental con un 17% de estudiantes que justificaron su respuesta con diferentes valores para una misma letra. Le sigue el error de tipo combinado (situacional, conceptual, procedimental) con un 15% de estudiantes que argumentaron su respuesta con valores numéricos. El 11% de los argumentos incorrectos fueron de tipo conceptual, es decir, los estudiantes no utilizaron las definiciones de ecuación y relación correctamente. Finalmente un 9% de los errores fueron del tipo situacional o más un centrado en el proceso de generalización¹⁶ que los estudiantes no pudieron realizar para resolver la situación-problema.

Los errores giran en torno a la falta de relación entre la representación de una misma situación; es decir, los estudiantes tienen dificultades en el proceso de generalización en la etapa aritmética por lo cual su nivel de abstracción está referido a la concreto, a los números, memorización de reglas y procedimientos más que a la comprensión de las tareas algebraicas, concepción estática de los símbolos de relación y falta de experiencia en tareas de variación (Socas et al. 1996). En general, los estudiantes tuvieron dificultades en realizar un tratamiento y conversión en el registro de representación de la situación problema con que se enfrentaban.

A partir de lo anterior, se realizó el análisis del 48% de los argumentos correctos de este ítem, teniendo en cuenta los objetos primarios (lenguaje, definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos). Véase la tabla 9.30.

Tabla 9.30: Configuración cognitiva asociada al ítem 24 del cuestionario cognitivo

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 24	
Situación-Problema:	
¿Qué puede decirse acerca de c si $c+d=10$ y c es menor que d ? (Justifique su respuesta).	
Lenguaje:	
- Lenguaje verbal: adición, sustracción, multiplicación, división, signo de relación, signo igual, letras, variables, ecuación, sustitución, inecuación o desigualdad, identidad, igualdad, relación de dependencia, ecuación equivalente, sentido de la desigualdad, desigualdad del mismo sentido, desigualdad de sentido contrario, propiedades de orden en los números reales. - Lenguaje simbólico: $+$; $<$; $>$; $=$; c; $c+d=10$; $c<d$; $a<c \Rightarrow a+c<b+c$, $a-c<b-c$; $a>b \Rightarrow a+c>b+c$, $a-c>b-c$; $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R} \Rightarrow$: Si $c(+)$ $a<b \Rightarrow ac<bc \wedge a/c<b/c$; Si $c(+)$ $a>b \Rightarrow ac>bc \wedge a/c>b/c$; Si $c(-)$ $a<b \Rightarrow ac>bc \wedge a/c>b/c$; Si $c(-)$ $a>b \Rightarrow ac<bc \wedge a/c<b/c$;	
Definiciones-Conceptos:	

¹⁶ La generalización es un término utilizado en las matemáticas para indicar el paso de lo particular a lo general y para ver lo general en casos particulares.

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 24

Previos:

- Adición, sustracción, multiplicación y división.
- Signos de relación, signo igual
- Identidad; Igualdad
- Relación de dependencia; Ecuación

Emergentes:

- Inecuación. Sentido de la desigualdad
- Desigualdad del mismo sentido,
- Desigualdad del sentido contrario
- Propiedad de orden de los números reales.

Propiedades:

Emergentes

- Si $a < c \Rightarrow a + c < b + c \wedge a - c < b - c$
- Si $a > b \Rightarrow a + c > b + c \wedge a - c > b - c$
- Si $c(+) a < b \Rightarrow ac < bc \wedge a/c < b/c$ la desigualdad no cambia
- Si $c(+) a > b \Rightarrow ac > bc \wedge a/c > b/c$ la desigualdad no cambia
- Si $c(-) a < b \Rightarrow ac > bc \wedge a/c > b/c$ la desigualdad cambia de orden
- Si $c(-) a > b \Rightarrow ac < bc \wedge a/c < b/c$ la desigualdad cambia de orden
- Si $a < b$ y además $b < c$ entonces $a < c$
- Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$ para toda $c \in \mathbb{R}$
- Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$

Procedimiento:

Previos: ¿Qué puede decirse acerca de c si $c + d = 10$ y c es menor que d ? (Justifique su respuesta).

Emergente:

- Pasar a un lado de la desigualdad los términos semejantes de la variable y al otro lado los términos independiente. Siempre con la operación contraria.
- Realizar suma algebraica entre los términos de cada miembro.
- Despejar la variable, es decir; si tiene coeficiente pasarlo al otro miembro con operación contraria. (si multiplica divide, se divide multiplica).

Argumentación:

- Si $c + d = 10 \Rightarrow d = 10 - c \Rightarrow c < d \Rightarrow c < 10 - c \Rightarrow c + c < 10 - c + c \Rightarrow 2c < 10 \Rightarrow (1/2) \cdot 2c < 10 \cdot (1/2) \Rightarrow c < 5$ por tanto podemos decir que c es menor que 5.
- Si $c + d = 10 \Rightarrow d = 10 - c \Rightarrow c < d \Rightarrow c < 10 - c \Rightarrow c + c < 10 - c + c \Rightarrow 2c < 10 \Rightarrow (1/2) \cdot 2c < 10 \cdot (1/2) \Rightarrow c < 5$ y si $c = 10 - d \Rightarrow 10 - d < d \Rightarrow 10 - d + d < d + d \Rightarrow 10 < 2d \Rightarrow (1/2) \cdot 10 < 2d \cdot (1/2) \Rightarrow 5 < d$ entonces podemos decir que $c < 5$ y se cumple que $c < d$ ya que si $c < 5 < d$ entonces $c < 5$.
- Argumento correcto sin justificación $c < 5$

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla de frecuencias y porcentajes (Tabla 9.31) podemos observar el 48% de los argumentos correctos. También podemos visualizar que estos argumentos se dividen en tres, es decir, los estudiantes fueron capaces de resolver este ítem realizando tres configuraciones cognitivas.

Tabla 9.31: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 24 del cuestionario cognitivo

Nº	Configuración cognitiva	Frecuencia	Porcentaje
1	Argumento correcto sin justificación $c < 5$	184	21
2	Si $c+d=10 \Rightarrow d=10-c \Rightarrow c < d \Rightarrow c < 10-c \Rightarrow c+c < 10-c+c \Rightarrow 2c < 10 \Rightarrow (1/2) \cdot 2c < 10 \cdot (1/2) \Rightarrow c < 5$ por tanto podemos decir que c es menor que 5.	105	12
3	Si $c+d=10 \Rightarrow d=10-c \Rightarrow c < d \Rightarrow c < 10-c \Rightarrow c+c < 10-c+c \Rightarrow 2c < 10 \Rightarrow (1/2) \cdot 2c < 10 \cdot (1/2) \Rightarrow c < 5$ y si $c=10-d \Rightarrow 10-d < d \Rightarrow 10-d+d < d+d \Rightarrow 10 < 2d \Rightarrow (1/2) \cdot 10 < 2d \cdot (1/2) \Rightarrow 5 < d$ entonces podemos decir que $c < 5$ y se cumple que $c < d$ ya que si $c < 5 < d$ entonces $c < 5$.	131	15
Total		420	48

Fuente: Elaboración propia

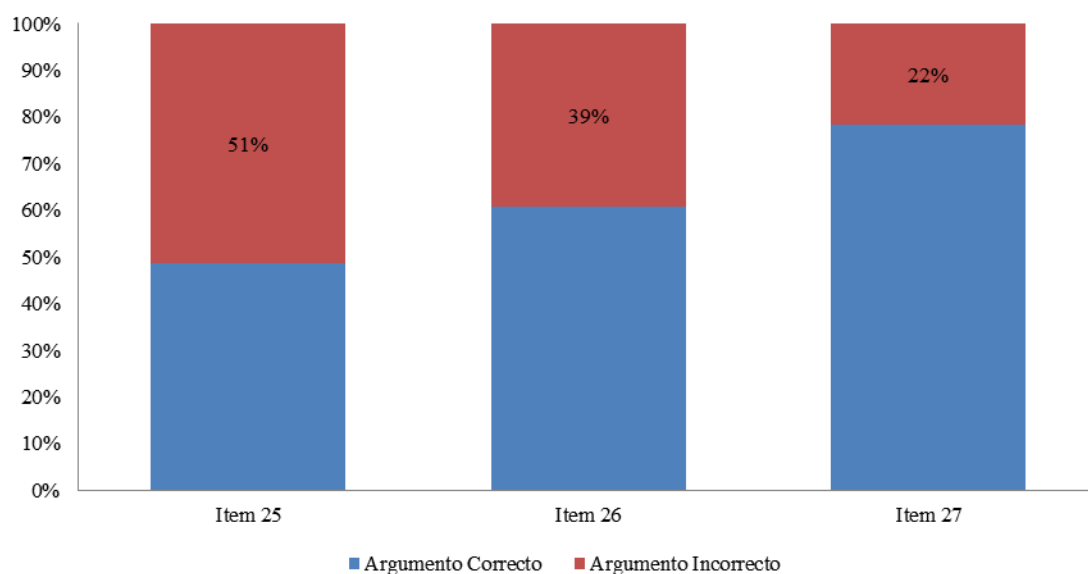
La configuración cognitiva 1 alcanzó el 21% de los argumentos correctos. Los estudiantes justificaron su respuesta solamente con la expresión $c < 5$. En la configuración cognitiva 2, con un 12% de los casos, fue justificada con las propiedades de ecuaciones e inecuaciones para hallar la solución. Finalmente, la configuración cognitiva 3, obtuvo el 15% de los argumentos correctos,. En este caso se llevó a cabo un buen uso de las propiedades de las ecuaciones e inecuaciones y, sobre todo, utilizando las “propiedades de orden” para justificar su respuesta.

Con base en estos resultados, se puede señalar que las configuraciones cognitivas tienen su origen en el desarrollo del proceso de generalización, es decir, los estudiantes tienen capacidad de realizar tratamiento y conversión en un registro de representación ya que reconocieron que las variables pueden representar varios valores, en lugar de uno sólo. En concreto, estos estudiantes realizaron procesos de generalización como: la visión de la regularidad, la diferencia, la relación, su exposición verbal, su expresión escrita, de la manera más concisa posible.

9.2.5 Nivel 5 de complejidad en los procesos de resolución de problemas matemáticos

En la figura 9.5 de porcentajes de respuestas de los ítems que constituyen el nivel 5 de complejidad en los procesos de resolución de problemas, se puede apreciar que la tendencia de argumentos incorrectos se encuentran entre el 22% y el 51%.

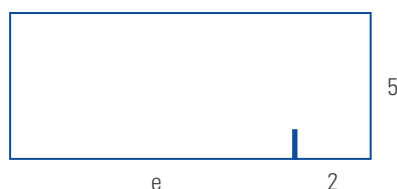
Figura 9.5: Porcentajes de respuestas de los ítems que constituyen el quinto nivel de complejidad



Fuente: Elaboración propia.

Con referencia a lo anterior, se realizó el análisis de los tipos de errores de los estudiantes, así como los tipos de configuración cognitivas referentes a los ítems 25 y 26 puesto que estos fueron los más complicado para los estudiantes en este nivel.

Análisis del ítem 25: ¿Cuál es el área A de la siguiente figura? (Justifique su respuesta).



En la tabla 9.32, se muestra que el 49% de los argumentos son correctos y el 51% incorrectos. Los argumentos incorrectos se dividen en errores del tipo situacional, conceptual, procedimental y combinando. Los errores de tipo situacional se producen porque los estudiantes argumentaron que el área del rectángulo es $10e$ y $e10$ como solución; dicho error representa el 8% de los argumentos incorrectos. El error conceptual se manifiesta por el uso incorrecto de la definición de área de rectángulo con un 5%. El error procedimental representa el 12% de los argumentos incorrectos. Se produce porque los estudiantes respondieron que el área del rectángulo es $e+10$ o $5e2$. Los errores de tipo combinado (situacional, conceptual y procedimental) corresponden al 21% del total de los argumentos incorrectos. Este error se produce porque los estudiantes justificaron su respuesta de la manera siguiente

“Si $A=ba \Rightarrow 5(e+2)=e+10$ ”. Finalmente un 5% de los argumentos incorrecto se debe a que los estudiantes no contestaron el ítem.

Tabla 9.32: Frecuencia y porcentaje de respuesta del ítem 25 del cuestionario cognitivo

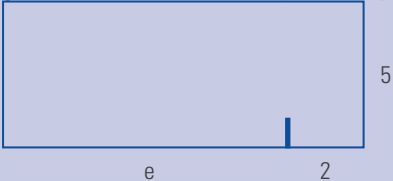
Tipo de respuesta	Subcategorías/Argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Argumento Correcto	$A=5(e+2)=5e+10$	429	49
Situacional	$10e$; $e10$	70	8
Conceptual	Uso incorrecto de la definición de área de rectángulo	44	5
Procedimental	$e+10$; $5e2$	105	12
Combinados	Si $A=ba \Rightarrow 5(e+2)=e+10$	184	21
No contestan	No hay argumento	44	5
Total		876	100

Fuente: Elaboración propia.

Estos errores tienen su origen en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación semiótico, estructural y autónomo (Socas, 2001); observamos que los estudiantes no dominan operaciones que tienen su origen en la aritmética; los errores de estructura o procedimientos son relativos al uso incorrecto de la propiedad distributiva. Los estudiantes no son capaces de realizar correctamente esta propiedad; finalmente, la dificultad de no reconocer la utilidad de las variable, en este caso como incógnitas específica. En concreto, los errores situacionales, conceptuales, procedimentales y combinados se deben a que los estudiante tienen dificultad para realizar una conversión en el registro representación y posteriormente su tratamiento.

Respecto al 49% de argumentos correctos, se analizó utilizando la noción de configuración cognitiva determinada por sus objetos primarios: lenguaje, definición-concepto, propiedades-proposiciones, procedimientos, argumentos y situación-problema. Véase la tabla 9.33.

Tabla 9.33: Configuración cognitiva asociada al ítem 25 del cuestionario cognitivo

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 25	
Situación-Problema:	
¿Cuál es el área A de la siguiente figura? (Justifique su respuesta).	
	

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 25

Lenguaje:

- Lenguaje verbal: adición, multiplicación, paréntesis; propiedad distributiva, área de un rectángulo, recta, segmento, rectángulo, polígono, diagonal, cuadrado, ángulo recto, figura plana, línea poligonal cerrada, rectángulo áureo, figuras equivalentes,
- Lenguaje simbólico: +; •; (); $A=ba$; $A=D^2/2$; $A=l^2$; 90° ; e ; $5(e+2)$; $5e+10$;

Definiciones-Conceptos:

Previos:

- Adición. Multiplicación
- Propiedades de los números reales

Emergentes:

- Área de rectángulo; Todos los ángulos son iguales. Propiedades de los rectángulos

Propiedades:

Emergentes

- $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$; $AB \neq BC$
- Un ángulo interior de un rectángulo vale un ángulo recto. En efecto: siendo todos los ángulos iguales, el valor de un ángulo interior será: $4R/4=1R$.
- Un ángulo exterior de un rectángulo vale un ángulo recto. En efecto: si la suma de los ángulos exterior es 360° y el rectángulo los cuatro ángulos son iguales, resulta que cada uno valdrá $4R/4=1R$.
- Las diagonales de un rectángulo son iguales. Se demuestra por igualdad de triángulos.
- Si dos rectángulos tienen iguales las bases, sus áreas son proporcionales a la alturas
- Si dos rectángulos tienen las alturas iguales, sus áreas son proporcionales a la bases.
- Las áreas de dos rectángulos son proporcionales a los productos de sus bases por alturas.

Procedimiento:

- Previos: ¿Cuál es el área A de la siguiente figura? (Justifique su respuesta).
- Emergente:
- Se debe reconocer a e como una entidad general que debe ser manipulada para obtener la expresión del área.
- Reconocer que e es una cantidad desconocida, cuyo valor puede determinarse realizando operaciones algebraicas o aritméticas.
- Se debe reconocer la correspondencia entre los valores de área y la relación de dependencia.
- En todo rectángulo el área es igual al producto de su base por su altura.

Argumentación:

- Considerando que los ángulos en el interior de la figura son ángulos rectos, por tanto su área es igual al producto de su base por altura, es decir: $5e+10$.
- Si consideramos que es un rectángulo, entonces: $A=ba$ donde $b=e+2$ y $a=5$ por sustitución en $A=ba \Rightarrow A=(e+2) \cdot 5$
- Si nombramos a este rectángulo $ABCD$ y decimo que la altura es $\overline{BC}=\overline{AD}=5$ y que la base es $AB=CD=e+2$ entonces concluimos que el área es $A=(\overline{BC}) \cdot (\overline{CD}) \Rightarrow A=(5) \cdot (e+2) \Rightarrow A=5e+10$.
- Argumento sin justificación $5e+10$

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 9.34 se muestran cuatro configuraciones cognitivas realizadas por los estudiantes. Se destaca la configuración cognitiva 4; los estudiantes contestaron el ítem directamente sin justificar su solución (19%). Le sigue la configuración cognitiva 1: los estudiantes asociaron la solución con la definición de área de rectángulo; esta argumentación

representa el 12% de las respuestas correctas. Con un 11% está la configuración cognitiva 2: los estudiantes encontraron la solución a partir de la definición de área y luego realizaron procedimientos y operaciones para definir dicha área. Sin embargo, sólo dejaron una solución indicada. Finalmente, en la configuración cognitiva 3 los estudiantes nombraron al rectángulo con letras del alfabeto y posteriormente definieron segmentos iguales hasta el punto de darle valores y así usar la definición de área de un rectángulo, dando la definición correcta de área. Esta configuración cognitiva representa el 7% de los argumentos correctos.

Tabla 9.34: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 25 del cuestionario cognitivo

Nº	Configuración cognitiva	Frecuencia	Porcentaje
1	Considerando que los ángulos en el interior de la figura son ángulos rectos, por tanto su área es igual al producto de su base por altura, es decir: $5e+10$.	105	12
2	Si consideramos que es un rectángulo, entonces: $A=ba$ donde $b=e+2$ y $a=5$ por sustitución en $A=ba \Rightarrow A=(e+2) \cdot 5$	96	11
3	Si nombramos a este rectángulo ABCD y decimo que la altura es $\overline{BC}=\overline{AD}=5$ y que la base es $AB=CD=e+2$ entonces concluimos que el área es $A=(\overline{BC}) \cdot (\overline{CD}) \Rightarrow A=(5) \cdot (e+2) \Rightarrow A=5e+10$.	61	7
4	Argumento sin justificación $5e+10$	167	19
Total		429	49

Fuente: Elaboración propia

Los resultados anteriores ponen de manifiesto las distintas situaciones de encontrar el área del rectángulo: mediante una representación visual geométrica, esquematización de la misma situación o visualización simplificada y la expresión algebraica correspondiente. Las configuraciones cognitivas resaltan las diferentes representaciones, así como los estudiantes realizan la conversión en el registro y posterior el tratamiento (Duval, 1993). En definitiva, los estudiantes realizaron conversiones de maneras diferentes para plantear una misma situación con representaciones semióticas distintas.

Análisis del ítem 26: Si $e+f=8$ entonces cuanto es $e+f+g=$ (Justifique su respuesta).

La tabla 9.35 revela que el 61% corresponde a los argumentos correctos y el 39% a los argumentos incorrectos. Los argumentos incorrectos se clasificaron de la manera siguiente: un 13% de los errores son combinados, con una mezcla de errores del tipo situacional, conceptual y procedimental. Los errores del tipo situacional tienen que ver con que los estudiantes realizaron una evaluación de la letra según el orden alfabético (7%). El error del tipo conceptual figura con un 8% y se debe a que los estudiantes ignoraron la definición de identidad, igualdad y por ende de ecuación; la expresan de la siguiente manera

“letra ignorada sin pensar en $e+f=8$ ”. Finalmente, el 11% de los argumentos incorrectos se produjeron por el uso incorrecto de la estructura u operación indicada, asumiendo que $e+f=8$ y que $e=4$ y $f=4$ lo que testifica un error del tipo procedimental.

Tabla 9.35: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 26 del cuestionario cognitivo

Tipo de respuesta	Subcategorías/Argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Argumento Correcto	$8+g$	534	61
Situacional	La evaluación de la letra según orden alfabético	61	7
Conceptual	Letra ignorada sin pensar en $e+f=8$	70	8
Procedimental	$e+f=8$ asumiendo que $e=4$ y $f=4$	97	11
Combinados	Si $a=1$ entonces $e=5, f=6, g=7$ por tanto la solución de $e+f+g=18$, ya que $5+6=11$	114	13
No contestan	No hay argumentos	0	0
Total		876	100

Fuente: Elaboración propia.

Estas dificultades ponen de manifiesto una debilidad en el ámbito de la transición de la aritmética al álgebra, lo que se sitúa como un obstáculo cognitivo referido a la enseñanza-aprendizaje de la aritmética (Socas, 2001). Posteriormente observamos que los estudiantes carecen de habilidades conceptuales y procedimentales lo que muestra la dificultad de estructura u operación. En concreto, los problemas se centraron en que los estudiantes no pudieron realizar un tratamiento en un registro de representación semiótica (Duval, 1993).

Fruto de lo anterior, se analizó las configuraciones cognitivas que los estudiantes realizaron concernientes a este ítem. Dichas configuraciones cognitivas pertenecen al 61% de los argumentos correctos. Véase la tabla 9.36.

Tabla 9.36: Configuración cognitiva asociada al ítem 26 del cuestionario cognitivo

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 26	
Situación-Problema:	
Si $e+f=8$ entonces cuanto es $e+f+g$ (Justifique su respuesta)	
Lenguaje:	
- Lenguaje verbal: ley de composición interna, operación binaria, adición, conmutativa, asociativa, elemento neutro, cancelativa, inverso aditivo, identidad, igualdad, ecuación, proposición, función proposicional, relación de dependencia, deducción e inducción, axiomas, relaciones equivalentes - Lenguaje simbólico: $+$; $\bullet$; $()$; $a+b \in \mathbb{R}$; $(a+b)+c=a+(b+c)$; $a+0=0+a=a$; $a+b=b+a$; $a+(-a)=(-a)+a=0$; $a(b+c)=ab+ac$; $(b+c)a=ba+ca$; $<, >, \Rightarrow, \therefore$	

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 26

Definiciones-Conceptos:

Previos:

- Ley de composición interna
- Operación binaria
- Definición de Adición en los reales
- Propiedades de los números reales

Emergentes:

- Identidad, igualdad, ecuación
- Proposición y función proposicional
- Relación de dependencia
- Relaciones equivalentes

Propiedades:

Emergentes

- Axiomas de Peano como proposiciones primitivas de un sistema deductivo.
- A cada número real corresponde un número real llamado siguiente de él, unívocamente determinado.
- Si un número real pertenece a R , también su siguiente pertenece a R , entonces todos los números reales pertenecen al conjunto R . Axioma de recurrencia o de inducción completa.
- Propiedades de la adición en los números reales: conmutativa, asociativa, elemento neutro, inverso aditivo, distributiva.

Procedimiento:

Previos: ¿Cuál es el área de la siguiente figura? (Justifique su respuesta).

Emergente:

- El resultado de sumar dos números reales es otro número real.
- El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado.
- El orden de los sumandos no varía la suma.
- El 0 (cero) es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número.
- Todo número real tiene un inverso aditivo, lo que quiere decir que si se suman el número y su inverso, el resultado es 0 (cero): si a es un número real.
- El opuesto del opuesto o inverso de un número es igual al mismo número.

Argumentación:

- El resultado de sumar dos números reales es otro número real; entonces si $e+f=8$ entonces $e+f+g=8+g$ ya que $e+f+g-g=8 \Rightarrow e+f=8$
- Si $(e+f)+g=e+(f+g) \Rightarrow (e+f)+s(g)=e+(f+s(g))$ en efecto $(e+f)+s(g)=s[(e+f)+g]=s[e+(f+g)]=e+s(f+g)=e+[f+s(g)]$ por tales razones de asociación se cumple que si $e+f=8$ entonces $e+f+g=8+g$ ya que $e+f+g-g=8 \Rightarrow e+f=8$
- Si $x=g$ y $h=e+f$ entonces $x+h=h+x \Rightarrow x+s(h)=s(h)+x$ en efecto $x+s(h)=x+(h+1)=(x+h)+1=(h+x)+1=h+(x+1)=h+(1+x)=(h+1)+x=s(h)+x$ como $s(h)=e+f=8$ y $x=g \Rightarrow e+f+g=8+g$.
- Argumento sin justificación $8+g$

Fuente: Elaboración propia.

Se encontraron 4 configuraciones cognitivas relevantes. La configuración cognitiva 4 es la que representa el 19% de los argumentos correctos. En ella los estudiantes escribieron una respuesta directa. Le sigue la configuración cognitiva 1, con un 18%; los estudiantes utilizaron de referencia la definición de suma de números reales para puntualizar la solución. En la configuración cognitiva 2, los estudiantes alcanzaron el 13%; la respuesta de los estudiantes en esta configuración cognitiva se justifica con la demostración de la propiedad asociativa. Finalmente, un 11% de los estudiantes realizaron una configuración cognitiva

donde justificaron su argumento a través de la demostración de la propiedad conmutativa. Véase la tabla 9.37.

Tabla 9.37: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 26 del cuestionario cognitivo

Nº	Configuración cognitiva	Frecuencia	Porcentaje
1	El resultado de sumar dos números reales es otro número real; entonces si $e+f=8$ entonces $e+f+g=8+g$ ya que $e+f+g-g=8 \Rightarrow e+f=8$	158	18
2	Si $(e+f)+g=e+(f+g) \Rightarrow (e+f)+s(g)=e+(f+s(g))$ en concreto $(e+f)+s(g)=s[(e+f)+g]=s[e+(f+g)]=e+s(f+g)=e+[f+s(g)]$ por tales razones de asociación se cumple que si $e+f=8$ entonces $e+f+g=8+g$ ya que $e+f+g-g=8 \Rightarrow e+f=8$	114	13
3	Si $x=g$ y $h=e+f$ entonces $x+h=h+x \Rightarrow x+s(h)=s(h)+x$ en efecto $x+s(h)=x+(h+1)=(x+h)+1=(h+x)+1=h+(x+1)=h+(1+x)=(h+1)+x=s(h)+x$ como $s(h)=e+f=8$ y $x=g \Rightarrow e+f+g=8+g$.	96	11
4	Argumento sin justificación $8+g$	166	19
Total		534	61

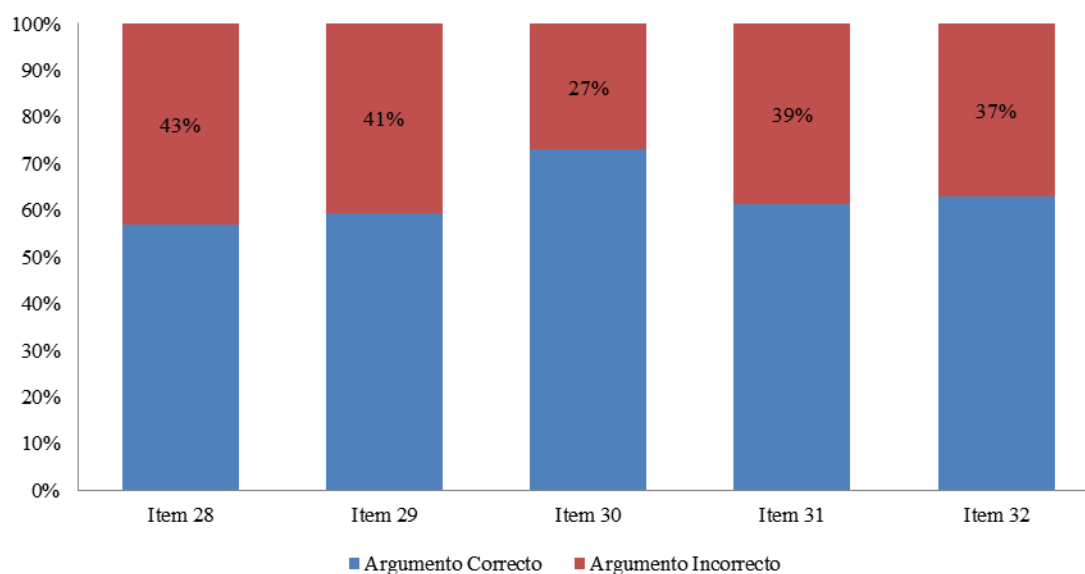
Fuente: Elaboración propia

Las configuraciones cognitivas encontradas indican que los estudiantes reflexionan sobre la relación entre una fórmula algebraica y los datos subyacentes. Lo que muestra que realizan un tratamiento en el registro de representación, es decir, que efectúan la transformación dentro del mismo de registro donde ha sido formado (Duval, 1993). Lo anterior revela que los estudiantes comprendieron los contenidos conceptuales y procedimentales en la faceta cognitiva de la aritmética, y esto se pone de manifiesto en la estructura u operación que se expone en las configuraciones cognitivas. En resumen, los estudiantes reconocen las traslaciones entre sistemas de representaciones formales.

9.2.6 Nivel 6 de complejidad en los procesos de resolución de problemas matemáticos

En la figura 9.6 se observan los porcentajes de argumentos correctos y argumentos incorrectos de los ítems que estructuran el sexto nivel de complejidad en los procesos de resolución de problemas matemáticos. También podemos visualizar que el porcentaje de argumentos incorrectos en los ítems oscilan entre 43% y 27%. El ítem más complejo, en este nivel, es el ítem 28. Por esta razón se va a llevar a cabo un análisis de sus cualidades y potencialidades.

Figura 9.6: Porcentajes de respuestas de los ítems que constituyen el sexto nivel de complejidad



Fuente: Elaboración propia.

Análisis del ítem 28: Los lápices azules cuestan a 5 córdobas cada uno y los lápices rojos a 6 córdobas cada uno. Si compro algunos lápices azules y rojos que juntos cuesten 90 córdobas, y llamamos a x al número de lápices azules que compro e y el número de lápices rojos que compro. ¿Qué puedes escribir sobre x e y ? (Justifique su respuesta).

En la tabla de frecuencias y porcentajes de respuesta del ítem 28 (Tabla 9.38), se observa que el 57% de los estudiantes argumentaron y justificaron bien sus respuestas. Por el contrario, el 43% de los estudiantes argumentaron incorrectamente. Estos argumentos incorrectos se clasificaron en situacionales, conceptuales, procedimentales y combinados.

Tabla 9.38: Frecuencias y porcentaje de respuesta del ítem 28 del cuestionario cognitivo

Tipo de respuesta	Subcategorías/Argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Argumento Correcto	$5x+6y=90$ en los pares (6,10),(12,5),(0,15),(18,0)	499	57
Situacional	x es un lápiz azul y que y es un lápiz rojo	114	13
Conceptual	Uso incorrecto de la función proposicional	53	6
Procedimental	$x+y$	79	9
Combinados	$x+y=90$	96	11
No contestan	No hay argumentos	35	4
Total		876	100

Fuente: Elaboración propia.

Los errores del tipo situacional representan el 13%. Se debieron a que los estudiantes argumentaron “ x es un lápiz azul e y es un lápiz rojo” sin llegar a una transformación completa del registro de representación. El 6% de los errores son del tipo conceptual, y se manifiestan porque los estudiantes usaron incorrectamente la definición de función proposicional. Los errores del tipo procedimental figuran con un 9% y corresponden a que los estudiantes ignoraron completamente al registro de representación numérico y no realizaron bien la transformación de un registro a otro. El 11% son errores del tipo combinado (situacional, conceptual y procedimental). En ellos los estudiantes tuvieron dificultades en formular, interpretar y emplear un modelo matemático para resolver la situación-problema con la que se enfrentaban, es decir, conflictos para relacionar el contexto de un problema con un modelo matemático y así generalizar y resolver el problema. Finalmente, un 4% de los estudiantes no contestó este ítem.

La explicación a las dificultades al distinguir entre una incógnita y parámetro la encontramos en Bolea, Bosch y Gascón (2001) quienes señalan que una incógnita es una variable que representa una cantidad desconocida, y que se opera con ella como si fuese conocida; mientras que un parámetro, es una variable que representa una cantidad conocida y que se opera con ella como si fuese desconocida. Esta problemática juega un papel importante en la conversión del registro de representación, o como añade Duval (1993) la conversión de una representación es la transformación de la representación en otra representación de otro de registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

En cambio, el 57% de los argumentos correctos representan un engranaje de oportunidades para realizar un análisis a partir de los objetos primarios (lenguaje, definiciones-conceptos, propiedades-proposiciones, procedimientos y argumentos) que conforman una configuración cognitiva. Véase la tabla 9.39.

Tabla 9.39: Configuración cognitiva asociada al ítem 28 del cuestionario cognitivo

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 28
Situación-Problema:
Los lápices azules cuestan a 5 córdobas cada uno y los lápices rojos a 6 córdobas cada uno. Si compro algunos lápices azules y rojos que juntos cuesten 90 córdobas, y llamamos a x al número de lápices azules que compro y y el número de lápices rojos que compro. ¿Qué puedes escribir sobre x y y ? (Justifique su respuesta)

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 28

Lenguaje:

- Lenguaje verbal:
Despejar, comprobar, simplificar, infinitas soluciones, suprimir paréntesis, agrupar términos, monedas, lápices, colores, cuestan, compro, modelar algebraicamente, solución sin sentido real, correspondencia, creciente, decreciente,
- Lenguaje simbólico:
 $ax+b=0, a \neq 0$; $x=(-b)/a$; x ; y ; $5x+6y=90$; $(6,10), (12,5), (0,15), (18,0)$; $5x$; $6x$; $+$; $()$; $\times$; $\div$.

Definiciones-Conceptos:

Previos:

- Letras, variables, Adición, multiplicación, propiedades en los números reales
- Expresión algebraica: términos
- Productos notables
- Factorización

Emergentes:

- Proposición; Función proposicional
- Identidad; igualdad; equivalencia
- Relación de dependencia;
- Creciente y decreciente.
- Ecuación lineal con una incógnita
- Ecuación lineal con dos incógnitas

Propiedades:

Emergentes

- $ax+b=0, a \neq 0$
- Propiedades que permiten transformaciones que mantienen la equivalencia de ecuaciones y permiten simplificar procesos (por ejemplo, el mínimo común múltiplo).
- Proceso de conversión de propiedades algebraicas en lenguaje nemotécnico: "lo que está sumando pasará a restar", lo que está multiplicando pasará a dividir"
- Procesos generales para construir un modelo algebraico de un problema.
- Propiedades de las funciones: creciente y decreciente.

Procedimiento:

Previos: Los lápices azules cuestan a 5 córdobas cada uno y los lápices rojos a 6 córdobas cada uno. Si compro algunos lápices azules y rojos que juntos cuesten 90 córdobas, y llamamos a x al número de lápices azules que compro y el número de lápices rojos que compro. ¿Qué puedes escribir sobre x y y ? (Justifique su respuesta)

Emergente:

- Primeramente, se lee cuidadosamente el problema y se piensa en el enunciado con la cantidad desconocida.
- Se introduce una letra para denotar la cantidad desconocida.
- Si es pertinente se realiza un dibujo con leyendas
- Se hace una lista de datos conocidos, junto con cualesquiera relaciones que contenga la cantidad desconocida.

Análisis de la configuración cognitiva del Ítem 28

Argumentación:

- Sea x =número de lápices azules; y =número de lápices rojos; entonces: si los lápices azules cuestan a 5 córdobas lo representamos por $5x$; y si los lápices rojos cuestan a 6 córdobas lo representamos por $6y$; y si juntos cuestan 90 córdobas; entonces podemos escribir de x y y lo siguiente: $5x+6y=90$.
- Si x =número de lápices azules; y =número de lápices rojos; se deduce de que x y y son parte de la siguiente ecuación $5x+6y=90$. Por tanto, podemos escribir una relación de correspondencia ya que valores pares como $(6,10),(12,5),(0,15),(18,0)$ representan el conjunto solución de la ecuación.
- x, y son parte de la ecuación $5x+6y=90$, dicha solución $(6,10),(12,5),(0,15),(18,0)$ y se puede escribir que x es creciente en 6; y decreciente en 5.
- $5x+6y=90$ Sin justificación.

Fuente: Elaboración propia.

Se encontraron cuatro configuraciones cognitivas en este ítem. A la configuración cognitiva 1 corresponden el 23% de los argumentos correctos. Se centra en una justificación procedimental sobre el aspecto de establecer el modelo para resolver la situación problema. En la configuración cognitiva 2, que representa el 8%, los estudiantes usaron un modelo para representar el problema pero, además, llevaron a cabo una relación de correspondencia entre la ecuación y el conjunto solución propuesto. En el 5% de los argumentos correctos, los estudiantes realizaron una configuración cognitiva referente a representar del lenguaje natural al lenguaje algebraico y posteriormente su solución y, finalmente, escribieron definiciones como creciente y decreciente para establecer un punto de inflexión. Finalmente, el 21% de los estudiantes establecieron el modelo matemático para darle solución al problema, pero no justificaron sus respuestas. Véase la tabla 9.40.

Tabla 9.40: Frecuencias y porcentaje de argumentos correctos en el ítem 26 del cuestionario cognitivo

Nº	Configuración cognitiva	Frecuencia	Porcentaje
1	Sea x =número de lápices azules; y =número de lápices rojos; entonces: si los lápices azules cuestan a 5 córdobas lo representamos por $5x$; y si los lápices rojos cuestan a 6 córdobas lo representamos por $6x$; y si juntos cuestan 90 córdobas; entonces podemos escribir de x y y lo siguiente: $5x+6y=90$.	201	23
2	Si x =número de lápices azules; y =número de lápices rojos; se deduce de que x y y son parte de la siguiente ecuación $5x+6y=90$. Por tanto, podemos escribir una relación de correspondencia ya que valores pares como $(6,10),(12,5),(0,15),(18,0)$ representan el conjunto solución de la ecuación.	70	8
3	x, y son parte de la ecuación $5x+6y=9$, dicha solución $(6,10),(12,5),(0,15),(18,0)$ y se puede escribir que x es creciente en 6; y decreciente en 5.	44	5
4	$5x+6y=90$ Sin justificación.	184	21
Total		499	57

Fuente: Elaboración propia

Los resultados revelaron que los estudiantes son hábiles para usar comprensivamente el álgebra para resolver problemas, y esto se refleja en la capacidad de manejar expresiones algebraicas para traducir una situación del mundo real. Es decir, los estudiantes pueden describir matemáticamente una materialización lingüística, mediante la que se plantea un problema o se discute un contenido matemático, con énfasis en las características sintácticas y en la estructura semántica. En concreto, los estudiantes mostraron habilidades para realizar una conversión en registro de representación y, además, llevar a cabo un tratamiento de un registro a otro.

9.2.7 A manera de resumen

En la tabla 9.41 presentamos, para cada ítem, la proporción de respuestas correctas (índice de dificultad, según Muñiz, 1994); cuanto mayor es este valor significa que el ítem es más fácil de resolver para los estudiantes.

Tabla 9.41: Distribución de las configuraciones cognitivas del cuestionario cognitivo

k	Configuración Cognitiva de Alto Nivel	Configuración Cognitiva de Bajo Nivel	k	Configuración Cognitiva de Alto Nivel	Configuración Cognitiva de Bajo Nivel
1	0,43	0,57	17	0,42	0,58
2	0,45	0,55	18	0,36	0,64
3	0,46	0,54	19	0,70	0,30
4	0,68	0,32	20	0,65	0,35
5	0,67	0,33	21	0,58	0,42
6	0,73	0,27	22	0,64	0,36
7	0,59	0,41	23	0,73	0,27
8	0,46	0,54	24	0,48	0,52
9	0,72	0,28	25	0,49	0,51
10	0,48	0,52	26	0,61	0,39
11	0,70	0,30	27	0,78	0,22
12	0,69	0,31	28	0,57	0,43
13	0,63	0,37	29	0,59	0,41
14	0,38	0,62	30	0,73	0,27
15	0,81	0,19	31	0,61	0,39
16	0,81	0,19	32	0,63	0,37

Fuente: Elaboración Propia.

Observamos que los ítems tienen el índice de dificultad siguiente: difíciles (1, 14, 17, 18) normales (2, 3, 8, 10, 24, 25), fáciles (7, 9, 13, 21, 22, 26, 28, 29, 31, 32) y muy fácil (4, 5, 6, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 27, 30). La clasificación del índice de dificultad ayudó a organizar el análisis de los ítems en función de su dificultad en los niveles de complejidad de los procesos de resolución de problemas matemáticos.

Partiendo de estos resultados se realizó el análisis de las configuraciones cognitivas, con el fin de caracterizar los objetos matemáticos que los estudiantes utilizan en la resolución de los problemas matemáticos. Se obtuvo como resultado que estos objetos matemáticos son de naturaleza algebraica, entre ellos: las propiedades de orden de los números reales, operaciones de los números reales y sus propiedades, proposiciones y funciones proposicionales, y estructuras, sus tipos y propiedades, que a continuación se explican.

Propiedades de orden de los números reales, las relaciones de orden encontradas son reflexiva, simétrica y transitiva, estas relaciones son usadas para definir nuevos conceptos matemáticos. Estas relaciones se utilizan para definir nuevos conceptos matemáticos. Por ejemplo, en la situación-problema “¿Cuál expresión es la mayor, $2n$ o $n+2$? (Justifique su respuesta)”, emergen objetos matemáticos como la propiedades reflexiva, simétrica y transitiva (véase la tabla 9.42).

Tabla 9.42: Propiedades de orden de los números reales

Situación- problema	Argumentos de los estudiantes	Objetos matemáticos																
¿Cuál expresión es la mayor, $2n$ o $n+2$? (Justifique su respuesta)	$n+2 < 2n$ cuando $n > 2$ ya que si $n=3$, entonces $3+2 < 2(3) \Rightarrow 5 < 6$	Relaciones de orden de los números reales: reflexiva.																
	$n+2 > 2n$ cuando $n < 2$ ya que si $n=-1, 0, 1$ entonces $-1+2 > 2(-1) \Rightarrow 1 > -2$; $0+2 > 2(0) \Rightarrow 2 > 0$; $1+2 > 2(1) \Rightarrow 3 > 2$																	
	$n+2 = 2n$ cuando $n = 2$ ya que si $2+2 = 2(2) \Rightarrow 4 = 4$ por tales razones $n+2 > 2n$ cuando $n < 2$.																	
	$n+2 < 2n$ cuando $n > 2$; $n+2 > 2n$ cuando $n < 2$; $n+2 = 2n$ cuando $n = 2$ y se comprueba en la siguiente tabla:																	
	<table> <tr> <th>n</th><th>$n+2$</th><th>$2n$</th></tr> <tr> <td>-1</td><td>1</td><td>-2</td></tr> <tr> <td>0</td><td>2</td><td>0</td></tr> <tr> <td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr> <td>2</td><td>4</td><td>4</td></tr> <tr> <td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr> </table>		n	$n+2$	$2n$	-1	1	-2	0	2	0	1	3	2	2	4	4	3
n	$n+2$	$2n$																
-1	1	-2																
0	2	0																
1	3	2																
2	4	4																
3	5	6																

Fuente: Elaboración propia.

Operaciones de los números reales y sus propiedades, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos matemáticos diversos (números, transformaciones geométricas, etc.). En la resolución de problemas matemáticos los estudiantes aplicaron propiedades de los números reales tales como: asociativa, conmutativa, distributiva, existencia del elemento del neutro y de un inverso. Asimismo, intervienen otros conceptos como ecuación, inecuación e incógnita, y procedimientos tales como: eliminación, trasposición de términos y factorización. Por ejemplo, en la situación-problema “Si n multiplicado por 4, puede escribirse como $4n$. Multiplique por 4 a $n+5$ ”, se encontraron objetos matemáticos tales como: la multiplicación de los números reales; propiedad asociativa y distributiva de los números reales; y la nociones de monomios, binomios y polinomios. Véase la tabla 9.43.

Tabla 9.43: Operaciones de los números reales y sus propiedades

Situación-problema	Argumentaciones de los estudiantes	Objetos matemáticos
Si n multiplicado por 4, puede escribirse como $4n$. Multiplique por 4 a $n+5$.	Definición de multiplicación $4n+20$	Multiplicación de los números reales, propiedad asociativa y distributiva, y la nociones de monomios, binomios y polinomios
	La multiplicación de monomios $(4) \cdot (n+20) = 4n+20$	
	La multiplicación de monomios por binomios: $(4) \cdot (n+5) = (4 \cdot n) + (4 \cdot 5) = 4n+20$	
	Multiplicación de dos polinomios $4 \cdot (n+5) = 4n+20$	

Fuente: Elaboración propia.

Otro ejemplo es usar variables para representar números y expresiones en la resolución de un problema del mundo real; comprender que una variable puede representar un número desconocido, o cualquiera número en un conjunto específico.

Proposiciones y funciones proposicionales, es necesario considerar los distintos tipos objetos involucrados: funciones, variables, fórmulas, parámetros, y contemplar las distintas representaciones de las proposiciones y funciones proposicionales: tabular, gráfica, fórmula y analítica. Por ejemplo, en la situación problema “Una manzana cuesta C\$ 150 y una pera C\$ 200. Si x es el número de manzana e y el número de pera compradas. ¿Qué representa la expresión $150x+200y$? ¿Por qué?”, se encontró que intervienen los conceptos de proposición, función proposicional, ecuación de primer grado con dos incógnitas, la igualdad como equivalencia y ecuación indeterminada (véase la tabla 9.44).

Tabla 9.44: Propositiones y funciones proposicionales

Situación-problema	Argumentaciones de los estudiantes	Objetos matemáticos
“Una manzana cuesta C\$ 150 y una pera C\$ 200. Si x es el número de manzana e y el número de pera compradas. ¿Qué representa la expresión $150x+200y$? ¿Por qué?”	La relación de costo de manzanas y peras.	Proposición, función proposicional, ecuación de primer grado con dos incógnitas, la igualdad como equivalencia y ecuación indeterminada.
	$150x+200y$ representa la solución matemática encontrada entre la relación de costo de manzanas y peras.	
	$150x+200y$ si igualamos a cero $150x+200y=0$ y despejamos y, $y=-4/3 x$, establecemos que el valor de y depende del valor x. Por tanto $150x+200y$ representa la relación de costo de manzanas y peras. peras, ya que si igualamos a cero la expresión $150x+200y=0$, obtenemos las expresiones “$x=-4/3 y$” y “$y=-3/4 x$” entonces sustituyendo esos valores para y encontramos que $y=-3/4 (-4/3 x) \Rightarrow y=x$, por lo tanto, se observa la relación de que el valor y depende del valor x.	

Fuente: Elaboración propia.

Estructuras, sus tipos y propiedades, objetos matemáticos tales como ley de composición interna, semigrupo, monoide, semimódulo, grupo, módulo, anillo, cuerpo y espacio vectorial características de una matemática superior o una algebra abstracta. Por ejemplo, en la situación problema “Si $e+f=8$ entonces cuanto es $e+f+g=$ (Justifique su respuesta)”, intervienen objetos matemáticos tales como: propiedades de las estructuras algebraicas y demostración de las propiedades de la adición y multiplicaciones de los números reales (véase la tabla 9.45).

Tabla 9.45: Estructuras, sus tipos y propiedades

Situación-problema	Argumentaciones de los estudiantes	Objetos matemáticos
Si $e+f=8$ entonces cuanto es $e+f+g=$ (Justifique su respuesta)	El resultado de sumar dos números reales es otro número real; entonces si $e+f=8$ entonces $e+f+g=8+g$ ya que $e+f+g=8 \Rightarrow e+f=8$	Propiedades de las estructuras algebraicas. Demostración de las propiedades de la adición y multiplicaciones de los números reales.
	Si $(e+f)+g=e+(f+g) \Rightarrow (e+f)+s(g)=e+(f+s(g))$ en concreto $(e+f)+s(g)=s[(e+f)+g]=s[e+(f+g)]=e+s(f+g)=e+[f+s(g)]$ por tales razones de asociación se cumple que si $e+f=8$ entonces $e+f+g=8+g$ ya que $e+f+g=8 \Rightarrow e+f=8$	
	Si $x=g$ y $h=e+f$ entonces $x+h=h+x \Rightarrow x+s(h)=s(h)+x$ en efecto $x+s(h)=x+(h+1)=(x+h)+1=(h+x)+1=h+(x+1)=h+(1+x)=(h+1)+x=s(h)+x$ como $s(h)=e+f=8$ y $x=g \Rightarrow e+f+g=8+g$.	
	Argumento sin justificación $8+g$	

Referente a los procesos matemáticos que intervienen en la práctica de resolución de problemas se pueden contemplar desde el punto de vista del proceso de matematización¹⁷. Dichos procesos matemáticos tienen relación con los objetos matemáticos utilizados por los estudiantes en la resolución de problemas. La tabla 9.46 resume dicha relación.

Tabla 9.46: Procesos matemáticos y su relación con los objetos matemáticos

Procesos Matemáticos	Propiedades de orden de los números reales	Operaciones de los números reales y sus propiedades	Proposiciones y funciones proposicionales	Estructuras, sus tipos y propiedades
Pensar y razonar	Responder a cuestiones en contextos muy conocidos	Formar y relacionar conceptos	Responder a cuestiones complejas en multitud de contexto.	Responder a cuestiones en contextos muy poco familiares
Argumentar y Justificar			Elaborar argumentos basados en sus acciones. Elaborar argumentos desde su propia reflexión	Formular los razonamientos desarrollados
Comunicar	Realizar explicaciones sencillas	Comunicar conclusiones con precisión	Describir resultados obtenidos	
Modelar			Usar modelos explícitos en situaciones concretas	Desarrollar y usar modelos en múltiples situaciones
Plantear y resolver problemas		Resolver problemas con datos sencillos. Seleccionar y aplicar estrategias sencillas	Generalizar resultados de problemas	Seleccionar, comparar y evaluar estrategias
Representar	Usar un único tipo de representación. Leer datos directamente de tablas o figuras		Vincular diferentes sistemas de representación incluyendo el simbólico. Relacionar y traducir con fluidez diferentes sistemas de representación.	Conocer y usar diferentes sistemas de representación

Fuente: Elaboración propia.

El análisis de las configuraciones cognitivas de objetos y procesos también ayudó a clasificar la familia de errores tales como situacional, conceptual, procedimental, combinados y sin argumentos. En la tabla 9.47 se presentan un resumen de dichos errores.

¹⁷ La matematización es el proceso de construcción de un modelo matemático, teniendo en cuenta los procesos generales tales como: pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, y representar.

Tabla 9.47: Distribución global de la familia de errores

Tipo de error	Familias de errores	% Frecuencia
Situacional	Errores relacionados con la expresión/contenidos de la tarea: el lenguaje en está formulada la tarea, los diagramas, figuras, datos, etc.	17
Conceptual	Errores debidos al uso o formulación de incorrecta de una definición o regla, concepto o propiedad (no su aplicación).	19
Procedimental	Aquellos errores que se producen al aplicar incorrectamente un procedimiento o una propiedad.	25
Combinados	Cuando se combinan dos o más errores de los anteriores.	37
Sin argumentos	Sujetos que dejaron en blanco los ítem.	2
Total		100

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla se observa que los errores del tipo situacional representa el 17%; el 19% de los errores son del tipo conceptual; los errores del tipo procedimental figuran con un 25%; el 37% son errores del tipo combinados (situacional, conceptual y procedimental); y un 2% son sin argumentos en los ítems.

Las principales dificultades que se detectaron en el análisis de las configuraciones cognitivas están directamente relacionadas con dificultades y errores en el trabajo de expresiones con variables, debido a un obstáculo cognitivo en el uso y dominio del concepto de variable (Collis, 1974; Furinghetti y Paula, 1994; Trigueros y Ursini, 1998; Schoenfeld y Arcavi, 1999; Cajaraville et al. 2012), y errores que tienen su origen en ausencia de sentido (Socas, Camacho, Palarea & Hernández, 1996; Duval, 1993), tipificándose en: dificultades que tienen su origen en la aritmética, errores procedimentales, dificultades debidas a la naturaleza del lenguaje algebraico dentro del contexto de las matemáticas, y dificultades en el proceso de generalización.

9.3 EFECTO EN LOS NIVELES DE COMPLEJIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Con el fin de determinar si existe un efecto de las variables especialidad de estudio, género y etnia de la población a que se le aplicó el cuestionario cognitivo, se realizó un análisis de varianza multifactorial para descubrir si estas variables marcan diferencias estadísticamente importantes en la puntuación de los niveles de complejidad de resolución de problemas matemáticos pre-establecidos en el cuestionario cognitivo (variable dependiente: Niveles de complejidad).

9.3.1 Análisis de las puntuaciones medias en el primero nivel de complejidad

La tabla 9.48 muestra la media del Nivel 1 de complejidad para cada uno de las categorías de las variables. También muestra los errores estándar de cada media, los cuales son una medida de variabilidad en su muestreo. Los dos columnas de la derecha muestran intervalos de confianza del 95% para cada una de las medias.

Tabla 9.48: Medias por mínimos cuadrados para el nivel 1 con intervalos de confianza del 95%

Variables	Nivel Media Global	Casos 876	Media 4,869	Error Est.	L (-)	L (+)
Especialidad	Administración de Empresas	113	5,690	0,195	5,308	6,072
	Contabilidad Pública y Auditoría	52	6,401	0,278	5,857	6,945
	Ingeniería Civil	81	5,137	0,225	4,696	5,578
	Ingeniería Agroforestal	113	3,994	0,197	3,608	4,380
	Medicina Intercultural	70	5,214	0,248	4,728	5,700
	Psicología en Contexto Multicultural	104	5,087	0,187	4,722	5,453
	Sociología con mención en Autonomía	89	5,270	0,208	4,863	5,678
	Ingeniería Zootecnia	81	4,721	0,221	4,287	5,155
	Comunicación Intercultural	40	3,285	0,297	2,703	3,868
	Desarrollo Local	40	3,776	0,304	3,180	4,371
	Informática Administrativa	93	4,980	0,197	4,595	5,366
Etnia	Miskito	202	5,154	0,145	4,869	5,439
	Mayangna	47	4,285	0,274	3,749	4,821
	Creole	83	4,591	0,220	4,160	5,023
	Mestizo	544	5,444	0,085	5,278	5,611
Género	Hombre	372	4,843	0,123	4,601	5,085
	Mujer	504	4,894	0,113	4,674	5,115

Fuente: Elaboración propia.

A partir del modelo de estimación de Dunn y Clarck (1987) para el análisis de varianza multifactorial de efectos fijos, hemos obtenido los componentes de la varianza (Tabla 9.49). De esta tabla obtenemos los cuadrados medios entre sujetos para cada uno de las variables y residual, así como sus grados de libertad. No se ha evaluado la significancia de la interacciones entre las variables. Las pruebas-F en la tabla de ANOVA permiten identificar las variables significativas. Los gráficos de medias ayudarán a interpretar los efectos significativos.

Tabla 9.49: Análisis de varianza para el primer nivel de complejidad

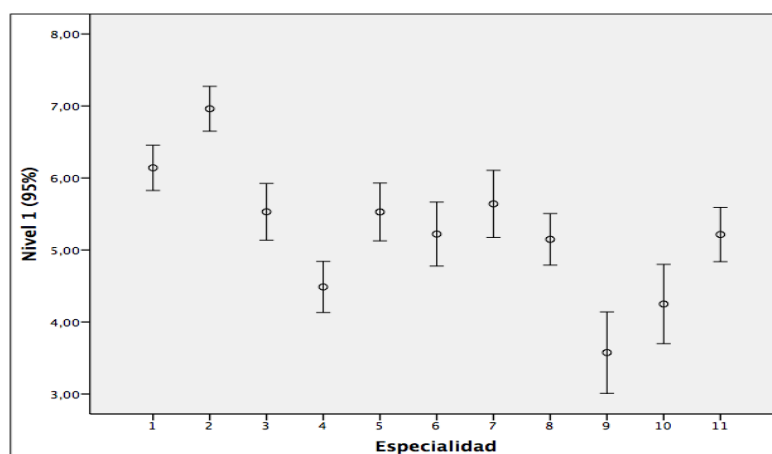
Fuente	Suma de Cuadros	GI	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Especialidad	452,949	10	45,2949	13,57	0,000
Género	0,512701	1	0,51270	0,15	0,664
Etnia	88,6564	3	29,5521	8,85	0,000
Residuos	2873,66	861	3,33759		
Total (corregido)	3445,78	875			

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 9.49 se descompone la variabilidad del primer nivel de complejidad en contribuciones debidas a las variables consideradas. Los valores-P indican la probabilidad de obtener un valor F tan extremo o más que el observado para cada una de las variables. En nuestro caso hemos encontrado diferencias significativas en la variable especialidad y etnia, como se muestra en la tabla. Puesto que el valor-P es menor que 0,05, estas variables tienen un efecto estadísticamente significativo sobre el primer nivel de complejidad con una significancia del 0,05% (equivalentemente a 95% de nivel de confianza). Por tanto, se puede rechazar la hipótesis de igualdad de puntuación media en especialidades y etnias, y admitimos que existen diferencias en cuanto a las especialidades a favor de la especialidad de Contabilidad Pública y Auditoria, con una diferencia de 3,116 con respecto a la menor puntuación media; así también se puede decir que existen diferencias significativas a favor de la etnia Mestizo con un diferencia de 1,159 con respecto a la menor puntuación media.

Las figuras siguientes (Figura: 9.7; 9.8) permiten ver las medias e intervalos de confianza en el primer nivel de complejidad para cada uno de los factores (Especialidad; Etnia) donde se confirman las conclusiones anteriores.

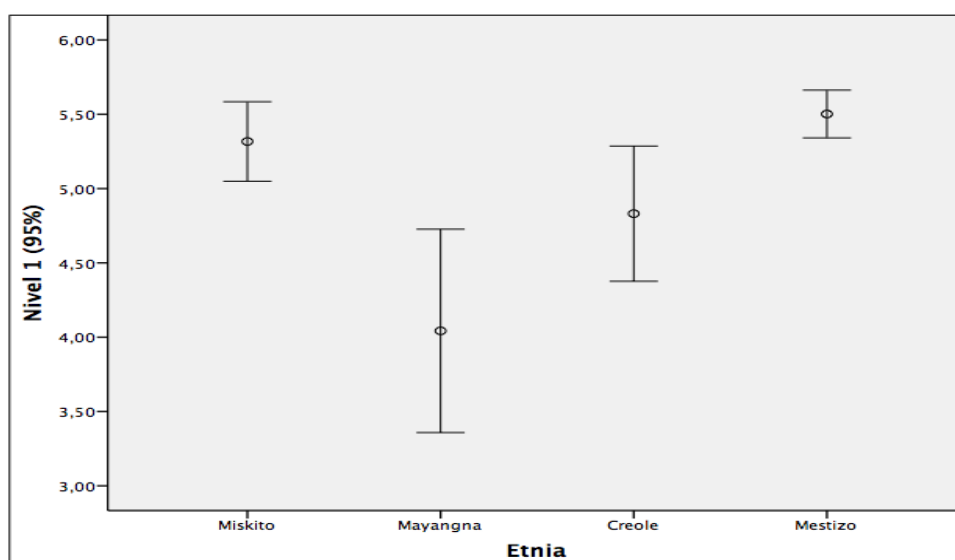
Figura 9.7: Tendencias por especialidad en el Nivel 1



Fuente: Elaboración propia.

En definitiva, los estudiantes de la especialidad de (2) Contabilidad Pública y Auditoría parecen tener más capacidad de resolver los ítems del primer nivel de complejidad que los de las otras especialidades. No obstante, los estudiantes de las especialidades de (1) Administración de Empresas, (3) Ingeniería Civil, (4) Ingeniería Agroforestal, (5) Medicina Intercultural, (6) Psicología en Contexto Multiculturales, (7) Sociología con Mención en Autonomía, (8) Ingeniería Zootecnia, (10) Desarrollo Local e (11) Informática Administrativa se encuentran por encima de la media, pero con una baja tendencia la especialidad de (9) Comunicación Intercultural. Por otra parte, los estudiantes de la etnia Mestizo obtuvieron las puntuaciones más altas en este nivel, seguidos de las etnias Miskitu y Creole que se sitúan sobre la media, y con una menor puntuación la etnia Mayangna. En resumen, en la variable etnia, existen diferencias significativas entre los grupos obteniendo la mayor puntuación los estudiantes de la etnia mestizo, lo que pone de manifiesto la prueba de análisis de varianza.

Figura 9.8: Tendencias por etnia en el Nivel 1



Fuente: Elaboración propia.

9.3.2 Análisis de las puntuaciones medias en el segundo nivel de complejidad

En la tabla 9.50 se muestran las medias del segundo nivel de complejidad en el proceso de resolución de problemas matemáticos para cada categoría de las variables (especialidad; etnia; género). Asimismo, se presentan los errores estándar de cada media, los cuales son una medida de la variabilidad en su muestreo. Las dos columnas de límite inferior (L-) y límite superior (L+) muestran intervalos de confianza del 95% para cada una de las medias.

Tabla 9.50: Medias por mínimos cuadrados para el nivel 2 con intervalos de confianza del 95%

Variables	Categoría	Casos	Media	Error Est.	L (-)	L (+)
	Media Global	876	4,077			
Especialidad	Administración de Empresas	113	5,234	0,171	4,899	5,568
	Contabilidad Pública y Auditoría	52	5,307	0,243	4,831	5,783
	Ingeniería Civil	81	4,773	0,197	4,387	5,159
	Ingeniería Agroforestal	113	3,832	0,172	3,494	4,170
	Medicina Intercultural	70	4,894	0,217	4,468	5,320
	Psicología en Contexto Multicultural	104	4,553	0,163	4,233	4,873
	Sociología con mención en Autonomía	89	4,685	0,182	4,328	5,041
	Ingeniería Zootecnia	81	3,617	0,194	3,237	3,997
	Comunicación Intercultural	40	1,710	0,260	1,200	2,220
	Desarrollo Local	40	1,272	0,266	0,751	1,794
	Informática Administrativa	93	4,972	0,172	4,634	5,310
Etnia	Miskito	202	4,296	0,127	4,046	4,545
	Mayangna	47	3,791	0,240	3,321	4,260
	Creole	83	4,081	0,193	3,704	4,459
	Mestizo	544	4,141	0,074	3,996	4,287
Género	Hombre	372	3,983	0,108	3,772	4,195
	Mujer	504	4,171	0,099	3,978	4,364

Fuente: Elaboración propia.

La tabla 9.51 (ANOVA) descompone la variabilidad del segundo nivel de complejidad en contribuciones debidas a varias variables (especialidad, etnia, género). Puesto que el valor-P en la variable especialidad es menor que 0,05, entonces la especialidad tiene un efecto estadísticamente significativo sobre el segundo nivel de complejidad con un 95% de nivel de confianza. Por tanto, se puede rechazar la hipótesis de igualdad de puntuación media entre las especialidades y se admite que existen diferencias significativas en cuanto a las especialidades a favor de la especialidad Contabilidad Pública y Auditoría con una diferencia de 4,035 con respecto a la menor puntuación media.

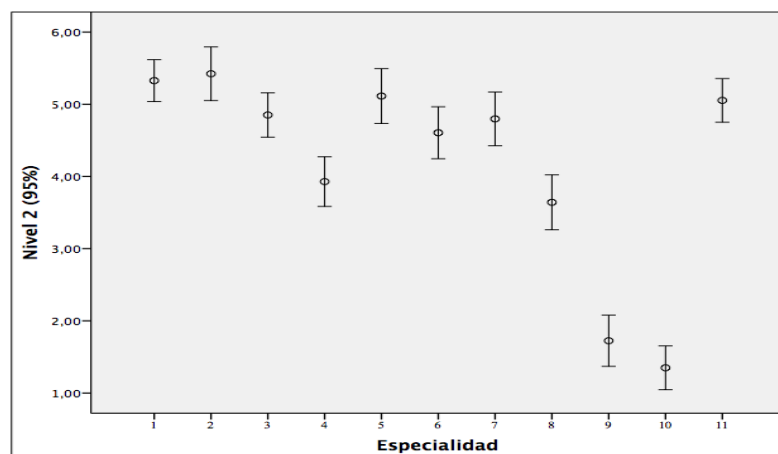
Tabla 9.51: Análisis de varianza para el segundo nivel de complejidad

Fuente	Suma de Cuadros	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Especialidad	900.862	10	90.0862	35.22	0.0000
Género	6.94267	1	6.94267	2.71	0.0994
Etnia	9.22973	3	3.07658	1.20	0.3076
Residuos	2202.23	861	2.55776		
TOTAL (Corregido)	3209.57	875			

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 9.9 se visualizan las diferencias proporcionales entre las especialidades y a favor de la especialidad (2) Contabilidad Pública y Auditoría. Así mismo, las especialidad de (1) Administración de Empresa, (3) Ingeniería Civil, (4) Ingeniería Agroforestal, (5) Medicina Intercultural, (6) Psicología en Contexto Multiculturales, (7) Sociología con Mención en Autonomía, (8) Ingeniería Zootecnia e (11) Informática Administrativa alcanzaron puntuaciones por encima de la media. En síntesis, los estudiantes de estas especialidades, que tienen estas puntuaciones altas ponen de manifiesto la capacidad de resolver problemas matemáticos en este segundo nivel de complejidad. No obstante, los estudiantes de (9) Comunicación Intercultural y (10) Desarrollo Local son lo que tienen las puntuaciones más bajas en este nivel, lo que se entiende como dificultades en la práctica de resolución de problemas matemáticos.

Figura 9.9: Tendencias por especialidad en el Nivel 2



Fuente: Elaboración propia

Con referencia a lo anterior, podemos expresar la confirmación de las diferencias significativas entre las especialidades, como se argumentó en la tabla 9.48.

9.3.3 Análisis de las puntuaciones medias en el tercer nivel de complejidad

La tabla 9.52 muestra la media de las puntuaciones en el tercer nivel de complejidad en la resolución de problemas matemáticos, así, como los errores estándar de cada media, que se pueden tipificar como una medida de variabilidad en su muestreo. También podemos observar los límites inferior y superior con intervalo de confianza del 95%.

Tabla 9.52: Medias por mínimos cuadrados para el nivel 3 con intervalos de confianza del 95%

Factores	Categoría	Casos	Media	Error Est.	L (-)	L (+)
	Media Global	876	3,189			
Especialidad	Administración de Empresas	113	3,615	0,159	3,303	3,927
	Contabilidad Pública y Auditoría	52	3,967	0,226	3,523	4,411
	Ingeniería Civil	81	3,656	0,184	3,296	4,017
	Ingeniería Agroforestal	113	3,093	0,161	2,777	3,408
	Medicina Intercultural	70	3,447	0,202	3,050	3,844
	Psicología en Contexto Multicultural	104	3,482	0,152	3,184	3,781
	Sociología con mención en Autonomía	89	3,719	0,170	3,387	4,052
	Ingeniería Zootecnia	81	2,915	0,181	2,561	3,270
	Comunicación Intercultural	40	1,441	0,243	0,965	1,917
	Desarrollo Local	40	1,882	0,248	1,396	2,369
	Informática Administrativa	93	3,859	0,161	3,544	4,174
Etnia	Miskito	202	3,320	0,119	3,088	3,553
	Mayangna	47	2,976	0,223	2,539	3,415
	Creole	83	3,093	0,180	2,741	3,446
	Mestizo	544	3,365	0,069	3,229	3,501
Género	Hombre	372	3,192	0,101	2,995	3,390
	Mujer	504	3,185	0,092	3,005	3,366

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 9.53, se descompone la variabilidad del tercer nivel de complejidad de resolución de problemas matemáticos en contribuciones debidas a varias variables (especialidad, género y etnia). Así mismo, se observa que el valor-P del factor especialidad es menor que 0,05, esto significa que la variable especialidad tiene un efecto estadísticamente significativo sobre el tercer nivel de complejidad, con un 95% de nivel de confianza. Por

tanto, se rechaza la hipótesis de igualdad de varianzas entre las especialidades y aceptamos que existen diferencias significativas en cuanto a las especialidades, a favor de la especialidad en Contabilidad Pública y Auditoria con una diferencia 2,526 con respecto a la menor puntuación media.

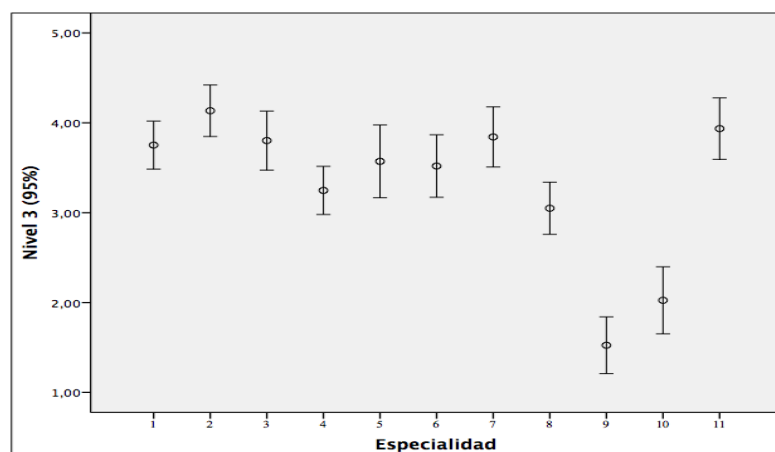
Tabla 9.53: Análisis de varianza para el tercer nivel de complejidad

Fuente	Suma de Cuadros	GI	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Especialidad	311,023	10	31,102	13,970	0,000
Género	9,467	3	3,156	1,420	0,236
Etnia	0,008	1	0,008	0,000	0,951
Residuos	1916,820	861	2,226		
TOTAL (Corregido)	2255,260	875			

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 9.10, podemos apreciar las diferencias entre las especialidades. La puntuación más alta, en este nivel, fue por los estudiantes de (2) Contabilidad Pública y Auditoria. Sin embargo, el resto especialidades están por encima de la media, exceptuando las especialidades en (9) Comunicación Intercultural y (10) Desarrollo Local. Aunque existen diferencias de puntuaciones entre estas dos especialidad favoreciendo a la especialidad en Desarrollo Local, siempre se mantiene una problemática en los estudiantes de estas especialidades en este nivel. En suma, se confirma los resultados del análisis de varianza, y se asume que existen diferencias significativas entre las especialidades y se pone de manifiesto que las especialidades que están encima de la media poseen más habilidades para resolver problemas sobresaliendo la especialidad en Contabilidad Pública y Auditoria que tiene la mayor puntuación en este nivel.

Figura 9.10: Tendencias por especialidad en el Nivel 3



Fuente: Elaboración propia.

9.3.4 Análisis de las puntuaciones medias en el cuarto nivel de complejidad

En la tabla 9.54 se muestra la media del cuarto nivel de complejidad para cada categoría de las variables (especialidad, etnia, género). También podemos observar los errores estándares de cada media, dichos errores representan una medida de variabilidad en su muestreo. Los límites inferiores y superiores de cada una de las categorías de las variables muestran intervalos de confianza del 95% para cada una de las medias.

Tabla 9.54: Medias por mínimos cuadrados para el nivel 4 con intervalos de confianza del 95%

Variables	Categoría	Casos	Media	Error Est.	L (-)	L (+)
	Media Global	876	1,297			
Especialidad	Administración de Empresas	113	1,478	0,095	1,292	1,665
	Contabilidad Pública y Auditoría	52	1,434	0,135	1,168	1,700
	Ingeniería Civil	81	1,500	0,110	1,285	1,716
	Ingeniería Agroforestal	113	1,419	0,096	1,230	1,607
	Medicina Intercultural	70	1,402	0,121	1,165	1,640
	Psicología en Contexto Multicultural	104	1,553	0,091	1,374	1,731
	Sociología con mención en Autonomía	89	1,688	0,101	1,489	1,887
	Ingeniería Zootecnia	81	0,989	0,108	0,777	1,201
	Comunicación Intercultural	40	0,621	0,145	0,337	0,906
	Desarrollo Local	40	0,502	0,148	0,211	0,793
	Informática Administrativa	93	1,679	0,096	1,491	1,868
Etnia	Miskito	202	1,317	0,071	1,178	1,456
	Mayangna	47	1,170	0,134	0,908	1,431
	Creole	83	1,395	0,107	1,184	1,605
	Mestizo	544	1,306	0,041	1,225	1,388
Género	Hombre	372	1,303	0,060	1,185	1,421
	Mujer	504	1,290	0,055	1,183	1,398

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 9.55, se presentan los resultados del análisis de varianza de las variables especialidad, género y etnia para el cuarto nivel de complejidad. A través del ANOVA se descompone la variabilidad del cuarto nivel de complejidad en contribuciones debidas a varias variables. Los valores-P prueban la significancia estadística de cada una de las variables. Puesto que el valor-P en la variable especialidad es menor que 0,05, se puede

concluir que esta variable tiene un efecto estadísticamente significativo sobre el cuarto nivel de complejidad con un 95% de nivel de confianza. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis de igualdad entre las especialidad y se asume que existen diferencias significativas entre las especialidades a favor de la especialidad en Sociología con Mención en Autonomía con una diferencia 1,186 con respecto a la menor puntuación media.

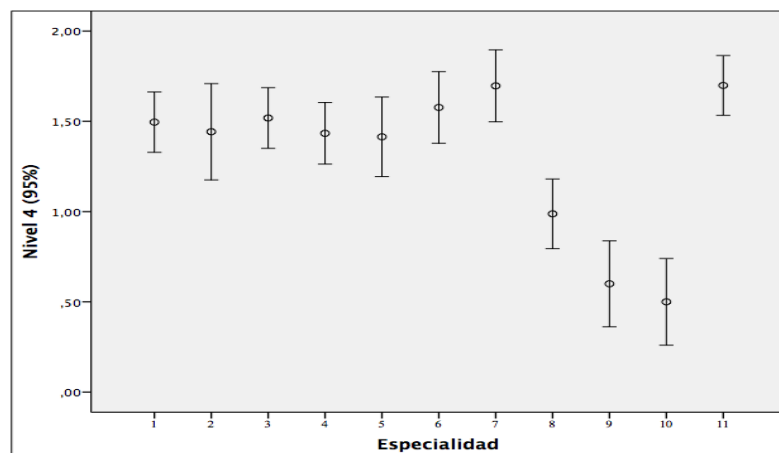
Tabla 9.55: Análisis de varianza para el cuarto nivel de complejidad

Fuente	Suma de Cuadros	GI	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Especialidad	82,497	10	8,250	10,370	0,000
Género	1,431	3	0,477	0,600	0,615
Etnia	0,033	1	0,033	0,040	0,839
Residuos	684,891	861	0,795		
TOTAL (Corregido)	779,958	875			

Fuente: Elaboración propia.

La figura 9.11 permite ver las medias e intervalos de confianza en la puntuación del cuarto nivel de complejidad para cada uno de las especialidades. En este nivel se destaca la especialidad (7) de Sociología con Mención de Autonomía. Sin embargo, las otras especialidades consiguieron puntuaciones por encima de la media, excluyendo las especialidades de (11) Comunicación Intercultural y (10) Desarrollo Local. En resumen, la mayorías de las especialidades parecen tener buenas capacidades para resolver problemas matemáticos en este nivel. Ahora bien, se confirma la existencia de diferencias estadísticamente significativas entre las especialidad favoreciendo a la especialidad de Sociología con Mención en Autonomía y desfavoreciendo a las especialidades de (9) Comunicación Intercultural y (10) Desarrollo local.

Figura 9.11: Tendencias por especialidad en el Nivel 4



Fuente: Elaboración propia.

9.3.5 Análisis de las puntuaciones medias en el quinto nivel de complejidad

La tabla 9.56 muestra las medias de las puntuaciones obtenidas en el quinto nivel de complejidad para cada uno de las categorías de las variables. También muestra los errores estándar de cada media, estos errores son una medida de la variabilidad en su muestro. Los límites inferior y superior se ajustan a intervalo de confianza del 95%.

Tabla 9.56: Medias por mínimos cuadrados para el nivel 5 con intervalos de confianza del 95%

Variables	Categoría	Casos	Media	Error Est.	L (-)	L (+)
	Media Global	876	1,560			
Especialidad	Administración de Empresas	113	1,807	0,094	1,623	1,991
	Contabilidad Pública y Auditoría	52	1,589	0,133	1,328	1,850
	Ingeniería Civil	81	1,405	0,108	1,193	1,617
	Ingeniería Agroforestal	113	1,563	0,095	1,378	1,749
	Medicina Intercultural	70	1,503	0,119	1,269	1,736
	Psicología en Contexto Multicultural	104	1,693	0,090	1,517	1,869
	Sociología con mención en Autonomía	89	1,661	0,100	1,465	1,857
	Ingeniería Zootecnia	81	1,469	0,106	1,261	1,678
	Comunicación Intercultural	40	1,348	0,143	1,068	1,628
	Desarrollo Local	40	1,292	0,146	1,006	1,578
	Informática Administrativa	93	1,826	0,095	1,641	2,011
Etnia	Miskito	202	1,606	0,070	1,469	1,743
	Mayangna	47	1,372	0,131	1,115	1,630
	Creole	83	1,681	0,106	1,474	1,888
	Mestizo	544	1,579	0,041	1,499	1,659
Género	Hombre	372	1,552	0,059	1,435	1,668
	Mujer	504	1,568	0,054	1,462	1,674

Fuente: Elaboración propia.

El análisis de varianza de varios factores pone de manifiesto que en la variable especialidad existen diferencias significativas. Puesto que el valor-P es menor que 0,05, este factor tiene un efecto estadísticamente significativo sobre el quinto nivel de complejidad de resolución de problemas con un 95% de nivel de confianza. . Por lo tanto, se rechaza la hipótesis de igualdad entre las especialidades y se asume que existen diferencias significativas entre las especialidad a favor de la especialidad en Informática Administrativa con una diferencia 0,534 en relación con la menor puntuación media. Véase la tabla 9.57.

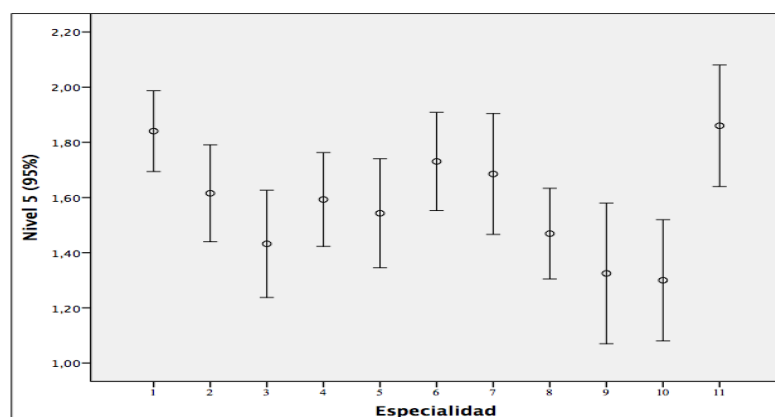
Tabla 9.57: Análisis de varianza para el quinto nivel de complejidad

Fuente	Suma de Cuadros	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Especialidad	20,687	10	2,069	2,690	0,003
Género	2,797	3	0,932	1,210	0,305
Etnia	0,051	1	0,051	0,070	0,797
Residuos	663,332	861	0,770		
TOTAL (Corregido)	691,437	875			

Fuente: Elaboración propia.

La figura 9.12 permite ver las medias e intervalos de confianza en la puntuación del quinto nivel de complejidad para cada una de las especialidades. En este nivel sobresale la especialidad de (11) Informática Administrativa, pero las otras especialidades consiguieron puntuaciones encima de la media. En general los estudiantes de la mayoría de las especialidades parecen tener buenas capacidades para resolver problemas matemáticos en este nivel. Por tanto, se confirma la existencia de diferencias estadísticamente significativas entre las especialidades favoreciendo a la especialidad de Informática Administrativa y desfavoreciendo a las especialidades de (9) Comunicación Intercultural y (10) Desarrollo local.

Figura 9.12: Tendencias por especialidad en el Nivel 5



Fuente: Elaboración propia.

9.3.6 Análisis de las puntuaciones medias en el sexto nivel de complejidad

En la tabla 9.58 se muestran las medias por mínimos cuadrados del sexto nivel de complejidad en los procesos de resolución de problemas. Los errores estándar que se visualizan en la tabla son una medida de variabilidad en el muestro de cada media. También podemos observar los límites inferior y superior a un nivel de confianza del 95% para cada una de las medias.

Tabla 9.58: Medias por mínimos cuadrados para el nivel 6 con intervalos de confianza del 95%

Variables	Categoría	Casos	Media	Error Est.	L (-)	L (+)
	Media Global	876	2,685			
Especialidad	Administración de Empresas	113	3,525	0,142	3,248	3,803
	Contabilidad Pública y Auditoría	52	3,357	0,201	2,962	3,751
	Ingeniería Civil	81	3,217	0,163	2,897	3,537
	Ingeniería Agroforestal	113	2,781	0,143	2,501	3,061
	Medicina Intercultural	70	3,324	0,180	2,971	3,677
	Psicología en Contexto Multicultural	104	3,493	0,135	3,228	3,759
	Sociología con mención en Autonomía	89	3,634	0,151	3,339	3,930
	Ingeniería Zootecnia	81	1,981	0,161	1,667	2,296
	Comunicación Intercultural	40	0,412	0,216	-0,010	0,835
	Desarrollo Local	40	0,307	0,221	-0,125	0,740
	Informática Administrativa	93	3,501	0,143	3,221	3,781
Etnia	Miskito	202	2,758	0,105	2,551	2,965
	Mayangna	47	2,485	0,199	2,096	2,875
	Creole	83	2,616	0,160	2,303	2,928
	Mestizo	544	2,881	0,062	2,760	3,001
Género	Hombre	372	2,731	0,090	2,556	2,907
	Mujer	504	2,638	0,082	2,478	2,798

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados del análisis de varianza descomponen la variabilidad del sexto nivel complejidad del proceso de resolución de problemas en contribuciones debidas a varias variables (Especialidad, etnia, género). Los valores-P prueban la significancia estadística de cada una de las variables. Puesto que un valor-P en la variable especialidad es menor que 0,05 esta variable tiene un efecto estadísticamente significativo sobre el sexto nivel de complejidad con 95% de nivel de confianza. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis de igualdad entre las especialidades y se asume que existen diferencias significativas entre las especialidades a favor de la especialidad en Sociología con Mención en Autonomía con una diferencia 3,327 en relación con la menor puntuación media. Véase la tabla 9.59.

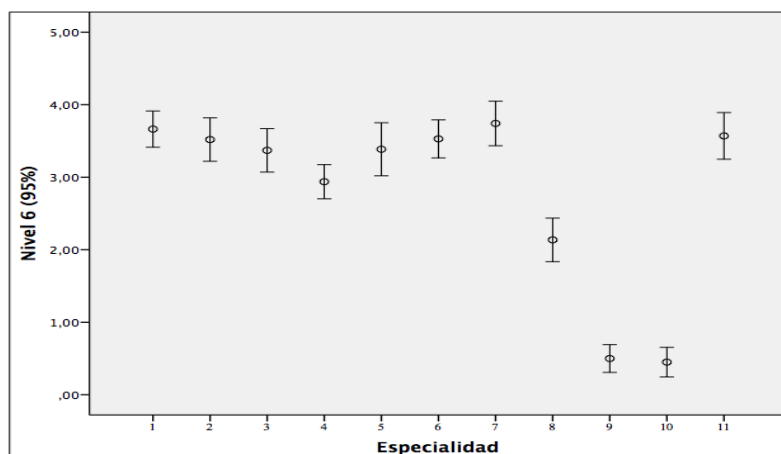
Tabla 9.59: Análisis de varianza para el sexto nivel de complejidad

Fuente	Suma de Cuadros	GI	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Especialidad	722,846	10	72,285	41,110	0,000
Género	9,843	3	3,281	1,870	0,134
Etnia	1,703	1	1,703	0,970	0,325
Residuos	1514,000	861	1,758		
TOTAL (Corregido)	2286,670	875			

Fuente: Elaboración propia.

La figura 9.13 permite ver las medias e intervalos de confianza en la puntuación del sexto nivel de complejidad, para cada uno de las variables, donde se confirma las conclusiones anteriores. En síntesis, la mayoría de las especialidades alcanzaron puntuaciones encima de la media destacando la especialidad en (7) Sociología con Mención en Autonomía, por lo que estos estudiantes parecen tener buenas capacidades para resolver problemas. Sin embargo las especialidades en (9) Comunicación Intercultural y (10) Desarrollo Local presentan dificultades en este nivel.

Figura 9.13: Tendencias por especialidad en el Nivel 6



Fuente: Elaboración propia.

9.3.7 A manera de resumen

A continuación se presentan los resultados del análisis multifactorial en los niveles de complejidad de resolución de problemas matemáticos relativos a las variables especialidad, género y etnia:

- El resultado del análisis de varianza muestra que las diferencias entre las puntuaciones en los niveles de complejidad de resolución de problemas fueron estadísticamente significativos.
- En los niveles 1, 2 y 3 de complejidad de resolución de problemas matemáticos los estudiantes de la especialidad en Contabilidad Pública y Auditoría son más efectivos a resolver las tareas matemáticas. En cambio en los niveles 4, 5, y 6 sobresalen los estudiantes de la especialidad en Sociología con Mención en Autonomía y la especialidad en Informática Administrativa.
- En todos los niveles de resolución de problemas matemáticos los estudiantes de las especialidades en Comunicación Intercultural y Desarrollo Local presentaron las mayores dificultades en la resolución de problemas.
- En relación con el grupo étnico, en el nivel 1 de complejidad de resolución de problemas matemáticos la etnia Mestizo tiene un mayor grado de efectividad en la resolución de tareas, seguidas de las etnias Creole y Miskito, sin embargo, en este nivel la etnia Mayangna posee dificultades. En los 2, 3, 4, 5 y 6 los grupos étnicos tienen la misma capacidad de resolución de problemas matemáticas.
- Un aspecto relevante fue que tanto hombres y mujeres, en todos los niveles, tienen la misma capacidad de resolución de problemas.

9.4 ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS DE LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Antes de comenzar con el análisis de las actitudes hacia las matemáticas, es necesario decir que la escala de actitud hacia las matemática permite obtener, una puntuación global sobre las actitudes y cinco puntuaciones mas referidas a cada uno de las aspectos que se evalúan: ansiedad, agrado, utilidad, motivación y confianza. En este sentido, se codificaron todas las respuestas de modo que una puntuación más alta signifique actitudes positivas en todos los aspectos.

Entonces, con la finalidad de identificar las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes universitarios se realizó, en primer lugar, una valoración global de las actitudes hacia este constructo y, en segundo lugar, un análisis de las relaciones existente entre las dimensiones actitudinales. Finalmente, se estudió la relación de las variables especialidad, género y etnia en las dimensiones actitudinales hacia las matemáticas. A continuación se presentan los principales resultados.

9.4.1 Valoración global de las actitudes hacia las matemáticas

Se analizó la puntuación total en la escala, así como las distintas agrupaciones, según los factores que se asocian a las actitudes hacia las matemáticas, cuyos resultados aparecen

reflejados conjuntamente en la tabla 9.60. En ella observamos cómo, en todas las situaciones, las medias obtenidas muestran puntuaciones inferiores a los valores teórico obtenidos por la autora del estudio en el que se construyó el instrumento de medida (Auzmendi, 1992).

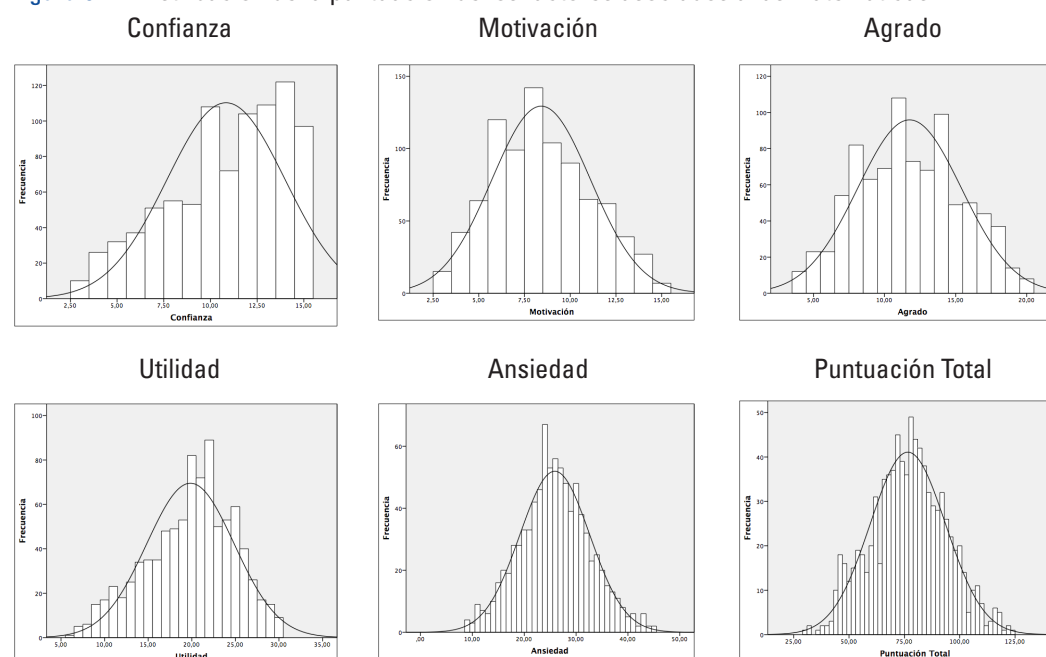
Tabla 9.60: Resumen estadísticos de la escala de actitud hacia las matemáticas

Factores	k	Mín.	Máx.	M	σ	M Teórica	E.T. M
Agrado	4	4	20	11,759	3,644	12,59	0,123
Utilidad	6	6	30	19,845	5,025	20,38	0,170
Ansiedad	9	9	45	25,895	6,727	31,10	0,227
Motivación	3	3	15	8,410	2,702	11,99	0,091
Confianza	3	3	15	10,833	3,169	12,59	0,107
Puntuación Total	25	30	123	76,567	17,007	85,68	0,575

Fuente: Elaboración propia.

Todos estos resultados se aprecian visualmente en la figura 9.14: tanto para los factores y la puntuación total de la escala de actitud hacia las matemáticas:

Figura 9.14: Distribución de la puntuación de los factores asociados a las matemáticas



Fuente: Elaboración propia.

Todos estos histogramas presentan, como característica común, la forma aproximadamente normal de distribución tanto en el caso de la puntuación total como en el de los factores. Este hecho autoriza el realizar un estudio de análisis de varianza en el que la hipótesis de normalidad es requisito. A la vista de los resultados obtenidos podemos afirmar

que las actitudes de los estudiantes universitarios respecto a las matemáticas es positiva globalmente y en sus distintos factores. Al no alcanzarse valores extremos en la puntuación, la gran mayoría se concentra en una actitud positiva, alrededor de 71 (moda), actitud que podríamos considerar moderada con tendencia alta; asimismo, se mantienen resultados análogos al pasar al estudio por factores. Es también alto el valor de la media (76,567).

9.4.2 Relaciones entre los factores asociados a las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas

Hemos analizado las correlaciones de los factores de la escala de actitud hacia las matemáticas. Podemos comprobar que el factor utilidad presenta un coeficiente de correlación más elevado con respecto al agrado, la confianza y la motivación hacia las matemáticas, lo que pone de manifiesto que el valor subjetivo atribuido a los procesos de resolución de problemas matemáticos es importante. A escasa distancia nos encontramos con el factor ansiedad, que con un valor de 0,594, nos induce a pensar que las emociones y los sentimientos de aceptación o de rechazo que el sujeto activa motivacionalmente ante la presencia de la resolución de problemas son positivos, ya que entre mayor puntuación, en este factor, menor ansiedad (Auzmendi, 1992; Gómez-Chancón, 2000). Los otros tres factores, agrado, motivación y confianza, aunque también muestran una asociación, es algo menor que las anteriores. Véase la tabla 9.61.

Tabla 9.61: Correlación entre los factores actitudinales hacia las matemáticas

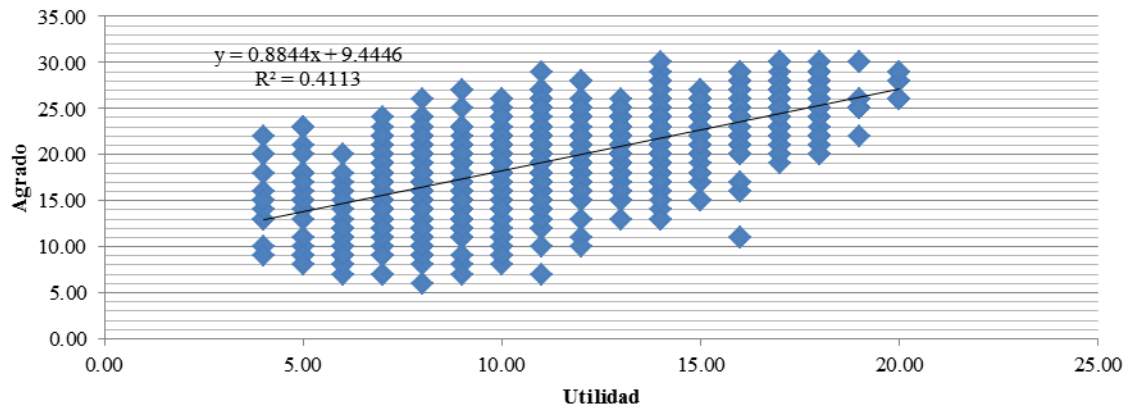
Factores	Agrado	Utilidad	Ansiedad	Motivación	Confianza
Agrado	1	0,641	0,582	0,423	0,509
Utilidad		1	0,594	0,597	0,641
Ansiedad			1	0,556	0,393
Motivación				1	0,290
Confianza					1

Fuente: Elaboración propia.

Respecto a la correlación de los diferentes factores entre sí, todas las correlaciones fueron estadísticamente significativas a niveles del 0,001: vemos que sus asociaciones respectivas son también importantes. Las correlaciones entre los diversos factores son estadísticamente significativos y de intensidad moderada o alta por lo que creemos que, aunque constituyen aspectos diferenciados de las actitudes, cada uno de estos aspectos puede influir en los otros. Por ejemplo, la utilidad percibida hacia los objetos y procesos matemáticos disminuye la ansiedad de los estudiantes cuando tratan de resolver una

situación-problema. Las relaciones entre agrado-utilidad con una correlación de Pearson de 0,641 se presentan en la figura 9.15:

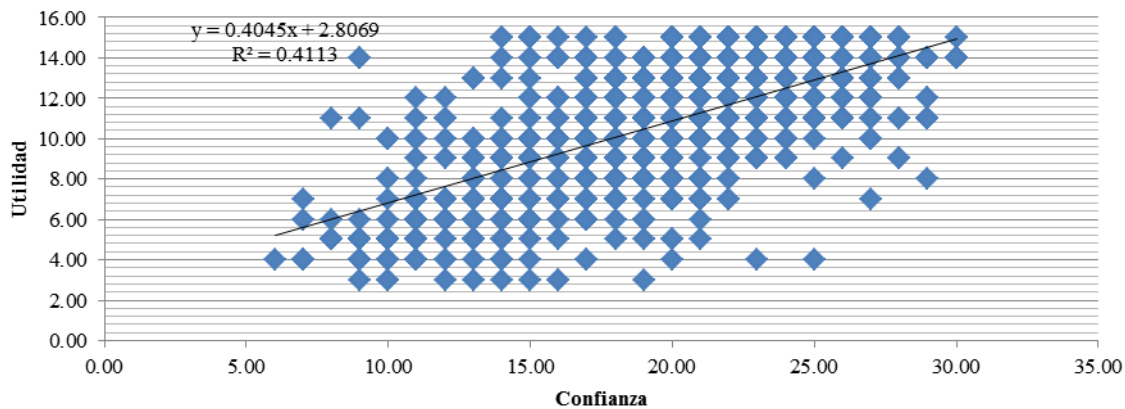
Figura 9.15: Relación entre agrado y utilidad



Fuente: Elaboración propia.

Y la relación entre utilidad-confianza con una correlación de r-Pearson de 0,641 se presenta en la figura 9.16:

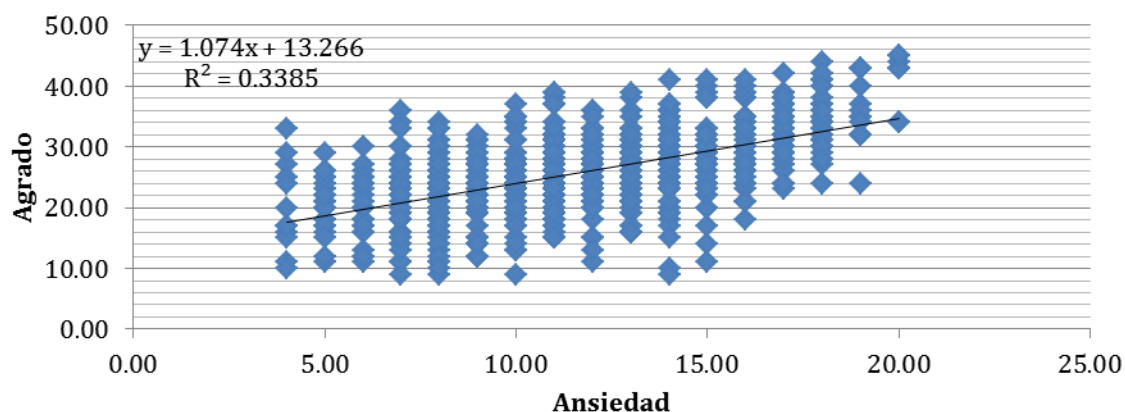
Figura 9.16: Relación entre utilidad y confianza



Fuente: Elaboración propia.

Estas dos relaciones se ajustan a un modelo lineal con pendiente inferior a la unidad, como se ve insertada en las figuras 9.16. Esto quiere decir: (1) que al crecer el agrado crece la utilidad y (2) que al crecer la utilidad crece la confianza, ya que están relacionados de forma directamente proporcional y muestran un coeficiente de correlación positivo.

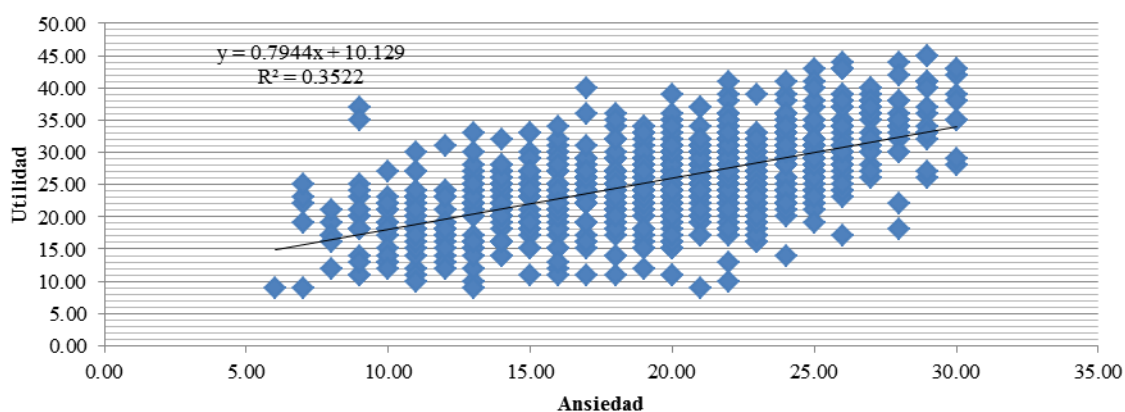
Figura 9.17: Relación entre agrado y ansiedad



Fuente: Elaboración propia.

Los resultados de la figura 9.17 exponen que a más agrado menos ansiedad. Hemos analizado también el coeficiente de correlación de r-Pearson, que es una $r=0,582$, sólo podemos concluir que es una correlación positiva. Por lo tanto, la ansiedad disminuye con el agrado, lo cual dice algo positivo sobre los estudiantes, y es que ven con agrado situaciones con contexto de resolución de problemas matemáticos que les producen ansiedad, quizá porque las consideran un desafío intelectual. Otra relación importante es entre utilidad y ansiedad (figura 9.18):

Figura 9.18: Relación entre utilidad y ansiedad

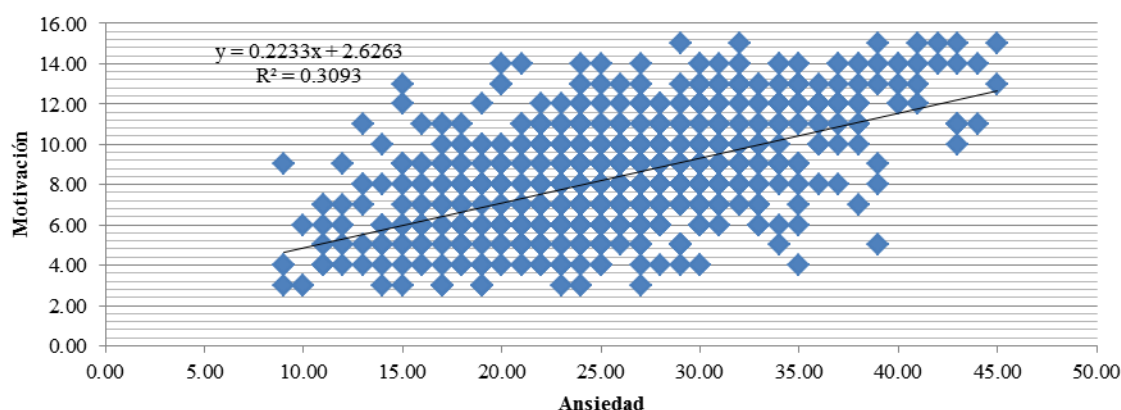


Fuente: Elaboración propia.

Vemos también un coeficiente de correlación positivo entre utilidad y ansiedad. El coeficiente de correlación de r-Pearson es $r=0,594$ para estos dos factores, lo que sigue apoyando la correlación positiva. Esto indica que la ansiedad disminuye con la utilidad, lo cual representa algo positivo sobre los estudiantes, y es que reconocen la utilidad de las matemáticas, lo que hace que la ansiedad sea menor en actividades relacionadas con las matemáticas.

En el caso de la relación entre motivación y ansiedad (figura 9.19) muestra una correlación de r-Pearson positiva en este caso una $r=0,556$, esto indica que ambas correlaciones están en la misma línea. Por lo tanto, se concluye que entre más valores para pequeños de motivación le corresponden pequeños valores de ansiedad, y en todo caso, la ansiedad disminuye con la motivación, lo cual dice algo positivo sobre los estudiantes, y es que se sienten motivados en prácticas sobre resolución de problemas matemáticos que les produce ansiedad.

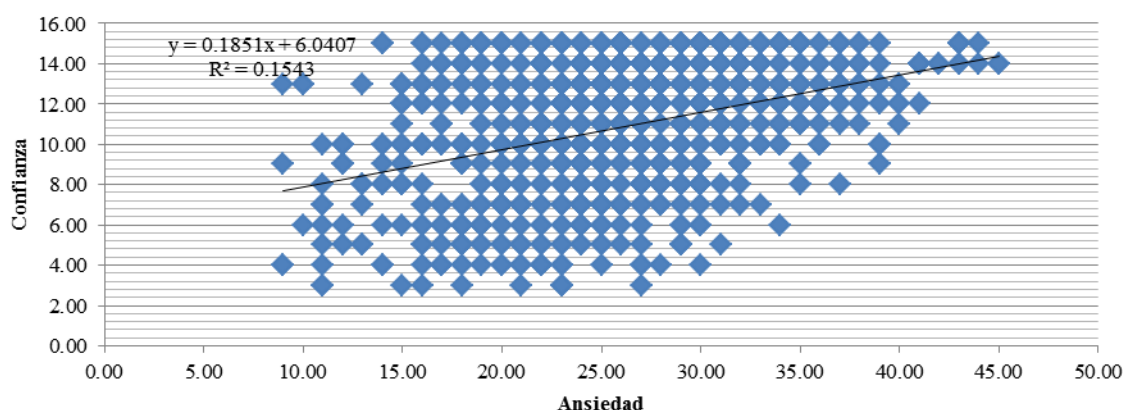
Figura 9.19: Relación entre motivación y ansiedad.



Fuente: Elaboración propia.

La relación entre confianza y ansiedad (figura 9.20) muestra una relación proporcional, esto quiere decir que al crecer la confianza disminuye la ansiedad, ya que están relacionados directamente proporcional y muestran un coeficiente de correlación de r-Pearson positivo, aunque bastante pequeño. El coeficiente de correlación de Pearson en este caso es una $r=0,393$, en la misma línea, pues apoya la correlación positiva entre las variables.

Figura 9.20: Relación de confianza y ansiedad



Fuente: Elaboración propia.

En general, la existencia de correlaciones positivas entre los factores se destacan la fuerte relación agrado-utilidad y utilidad-confianza con $r=0,641$. Finalmente, subrayamos que cuando los estudiantes se presentan a situaciones matemáticas se activan emociones y sentimientos como la utilidad, el agrado, la confianza y la motivación, lo que ayuda a que la ansiedad hacia las matemáticas sea menor en los procesos de resolución de problemas matemáticos.

9.4.3 Influencias de las variables género, especialidad y etnia en las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas

Se analizó si en las variables especialidad¹⁸, género y etnia se observan diferencias en los factores asociados a las actitudes hacia las matemáticas (ansiedad, utilidad, agrado, motivación y confianza), según el grupo de la muestra del que se trate en cada una de estas variables. Para ello se realizó un análisis de la varianza multifactorial para determinar qué variables tienen un efecto estadísticamente significativo sobre los factores actitudinales¹⁹. Los resultados de análisis de varianza multifactorial de efectos fijos se representa en una tabla con la siguiente información: los cuadrados medios entre sujetos para cada uno de las variables y el residual, así como sus grados de libertad. No se ha evaluado la significación de las interacción entre las variables. Las pruebas-F en la tabla ANOVA permiten identificar las variables significativas. Las figuras de medias ayudarán a interpretar los efectos significativos.

¹⁸ Variable independiente → Variables: género, etnia, especialidad

¹⁹ Variable dependiente → Factores actitudinales: ansiedad, utilidad, agrado, motivación y confianza.

A continuación se describe el estudio del efecto de las actitudes hacia las matemáticas en la prueba de las variables especialidad, género, etnia.

El efecto sobre la ansiedad en las variables especialidad, género, etnia

La tabla 9.62 muestra la media de las puntuaciones en el factor ansiedad para cada uno de los niveles de las variables. También muestra los errores estándar de cada media, los cuales son una medida de variabilidad en su muestreo. Así como los límites inferior y superior, que muestran intervalos de confianza del 95% para cada una de las medias.

Tabla 9.62: Medias por mínimos cuadrados para ansiedad con intervalos de confianza del 95%

Variables	Categoría	Casos	Media	Error Est.	L (-)	L (+)
	Media Global	876	26,217			
Especialidad	Administración de Empresas	113	28,408	0,670	27,095	29,722
	Contabilidad Pública y Auditoría	52	26,560	0,953	24,692	28,429
	Ingeniería Civil	81	26,653	0,773	25,139	28,168
	Ingeniería Agroforestal	113	25,973	0,677	24,647	27,300
	Medicina Intercultural	70	29,005	0,852	27,334	30,675
	Psicología en Contexto Multicultural	104	30,146	0,641	28,889	31,403
	Sociología con mención en Autonomía	89	25,225	0,714	23,826	26,625
	Ingeniería Zootecnia	81	22,610	0,760	21,119	24,100
	Comunicación Intercultural	40	24,158	1,021	22,157	26,158
	Desarrollo Local	40	24,593	1,044	22,546	26,640
	Informática Administrativa	93	25,058	0,676	23,733	26,382
Etnia	Miskito	202	24,752	0,499	23,774	25,731
	Mayangna	47	26,239	0,940	24,396	28,081
	Creole	83	28,454	0,756	26,973	29,936
	Mestizo	544	25,424	0,292	24,852	25,996
Género	Hombre	372	26,085	0,424	25,254	26,916
	Mujer	504	26,349	0,387	25,591	27,107

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 9.63 se descompone la variabilidad de la ansiedad hacia las matemáticas en las contribuciones debidas a las variables consideradas. Los valores-P indican la pro-

babilidad de obtener un valor-F tan extremo o más que el observado para cada una de las variables. En nuestro caso hemos encontrado diferencias estadísticamente significativas en las variables especialidad y etnia, como se muestra en la tabla. Puesto que el valor-P es menor que 0,05, estas dos variables tienen un efecto estadísticamente significativo sobre la ansiedad hacia las matemáticas con una significancia del 0,05% (equivalentemente a 95% de nivel de confianza). Por tanto, se puede rechazar la hipótesis de igualdad de puntuación media entre las especialidades y entre las etnias, y admitimos que existen diferencias estadísticamente significativas en cuanto a las especialidades a favor de la especialidad en Psicología en contexto Multiculturales con una diferencia de 7,536 respecto con la menor puntuación en las medias y referente a las etnias a favor de la etnia Creole con una diferencia de 3,702 en relación con la menor puntuación en las medias. En resumen, la especialidad en Psicología Contexto Multiculturales y la etnia creole, presentan menor grado de ansiedad, ya que, entre más puntuación en la escala es menor el grado de ansiedad (Auzmendi, 1992).

Tabla 9.63: Análisis de varianza en ansiedad hacia las matemáticas

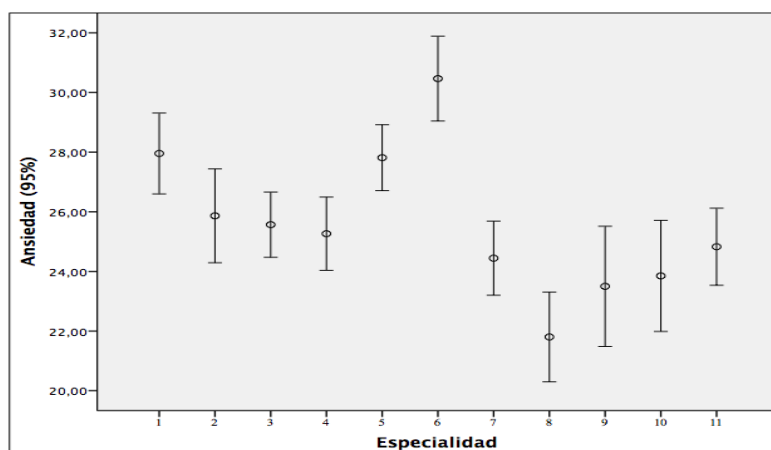
Variables	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Especialidad	3854,820	10	385,482	9,790	0,000
Etnia	718,977	3	239,659	6,080	0,000
Género	13,688	1	13,688	0,350	0,556
Residuos	33914,800	861	39,390		
TOTAL (Corregido)	39592,300	875			

Fuente: Elaboración propia.

Las figuras (Figuras: 9.21, 9.22, 9.23) permiten ver las medias e intervalos de confianza en la puntuación de ansiedad para cada uno de los factores, donde se confirman las conclusiones anteriores. En definitiva, con respecto a las especialidades²⁰, los estudiantes de las especialidad en (6) Psicología en contexto Multiculturales presentan una menor ansiedad y los estudiantes con mayor ansiedad son los estudiantes de (8) Ingeniería en Zootecnia, (9) Comunicación Intercultural y (10) Desarrollo Local, las demás especialidades están sobre las medias. Cabe mencionar que la escala está codificada de modo que a mayor puntuación menor ansiedad. Véase figura 9.21.

²⁰ Especialidad: (1) Administración de Empresas; (2) Contabilidad Pública y Auditoría; (3) Ingeniería Civil; (4) Ingeniería Agroforestal; (5) Medicina Intercultural; (6) Psicología en contexto Multiculturales; (7) Sociología con mención en Autonomía; (8) Ingeniería en Zootecnia; (9) Comunicación Intercultural; (10) Desarrollo Local; (11) Informática Administrativa.

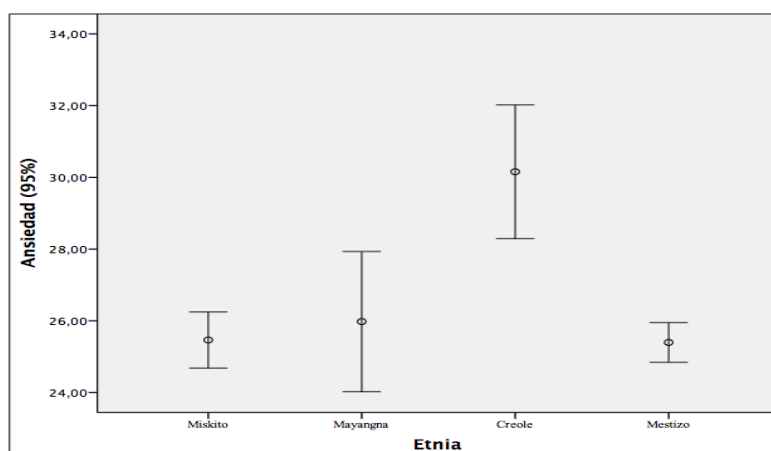
Figura 9.21: La ansiedad hacia las matemáticas en las especialidades



Fuente: Elaboración propia.

Concerniente a las etnias, los estudiantes pertenecientes a la etnia Creole obtuvieron puntuaciones medias más elevadas, lo que significa que tienen menor ansiedad hacia las matemáticas. En cambio los estudiantes de la etnia Miskito son los que tienen mayor ansiedad hacia las matemáticas, seguido de las etnias Mestizo y Mayangna. Esto indica que en la variable etnia existen diferencias significativas. Véase la figura 9.22.

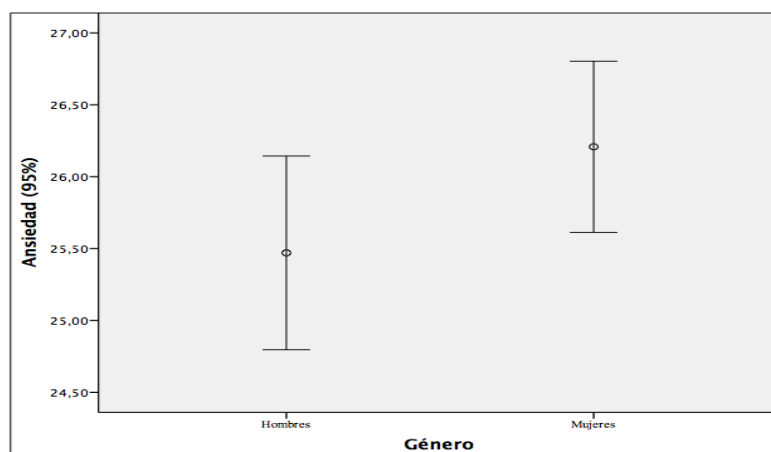
Figura 9.22: La ansiedad hacia las matemáticas en las etnias



Fuente: Elaboración propia.

La figura 9.23 confirma la prueba de ANOVA en la variable género donde las medias se comportan igual tanto para hombres y mujeres (es decir, no existen diferencias significativas entre ambos grupos).

Figura 9.23: La ansiedad hacia las matemáticas en el género



Fuente: Elaboración propia.

Lo anterior, se comprueba con la prueba T para muestras independientes en el factor ansiedad. Donde la prueba de Levene de homogeneidad de varianza y la prueba T para la igualdad de medias obtuvieron un valor de significancia mayor que 0,05, lo que indica la igualdad entre las medias en hombres y mujeres, véase la tabla 9.64. Por tanto, aceptamos que entre hombres y mujeres poseen la misma tendencia de ansiedad hacia las matemáticas.

Tabla 9.64: Prueba T para muestra independientes en el factor ansiedad con respecto a género

		Prueba de Levene de calidad de varianzas		Prueba t para la igualdad de medias						
		F	Sig.	t	gl	Sig.	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
									Inferior	Superior
Ansiedad	Varianzas iguales	0,382	0,537	-1,606	874	0,109	-0,738	0,459	-1,640	0,164
	Varianzas desiguales			-1,613	812	0,107	-0,738	0,457	-1,636	0,160

Fuente: Elaboración propia.

El efecto sobre la utilidad en las variables especialidad, género, etnia

La tabla 9.65 muestra la media de las puntuaciones en el factor utilidad hacia las matemáticas para cada uno de las variables especialidad, género y etnia. Igualmente detalla los errores estándar de cada media, los cuales representan una medida de variabilidad en su muestreo. Los límites inferior y superior están ajustado a un intervalo de confianza del 95% para cada una de las medias.

Tabla 9.65: Medias por mínimos cuadrados para utilidad con intervalos de confianza del 95%

Variables	Categoría	Casos	Media	Error Est.	L (-)	L (+)
	Media Global	876	19,723			
Especialidad	Administración de Empresas	113	22,625	0,445	21,753	23,498
	Contabilidad Pública y Auditoría	52	22,161	0,634	20,919	23,403
	Ingeniería Civil	81	22,598	0,514	21,591	23,604
	Ingeniería Agroforestal	113	20,161	0,450	19,280	21,043
	Medicina Intercultural	70	22,091	0,567	20,981	23,202
	Psicología en Contexto Multi-cultural	104	22,278	0,426	21,443	23,114
	Sociología con mención en Autonomía	89	19,436	0,475	18,506	20,366
	Ingeniería Zootecnia	81	14,214	0,505	13,224	15,205
	Comunicación Intercultural	40	15,210	0,679	13,880	16,539
	Desarrollo Local	40	16,236	0,694	14,876	17,597
	Informática Administrativa	93	19,942	0,449	19,062	20,823
Etnia	Miskito	202	19,150	0,332	18,500	19,801
	Mayangna	47	19,523	0,625	18,299	20,748
	Creole	83	20,968	0,502	19,983	21,952
	Mestizo	544	19,251	0,194	18,871	19,631
Género	Hombre	372	19,813	0,282	19,261	20,365
	Mujer	504	19,633	0,257	19,129	20,137

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados del análisis de varianza en el factor utilidad hacia las matemáticas, descompone la variabilidad de la utilidad en contribuciones debidas a varias variables (especialidad, etnia y género), véase tabla 9.66. Los valores-P prueban la significancia estadística de cada una de las variables. Puesto que dos valores-P son menores que 0,05, estas variables tienen un efecto estadísticamente significativo sobre el factor utilidad con 95% de nivel de confianza. Por tanto, se puede rechazar la hipótesis de igualdad de varianza entre las especialidades y entre las etnias, y admitimos que existen diferencias estadísticamente significativas en cuanto a las especialidades a favor de la especialidad en Administración de Empresas con una diferencia de 8,411 respecto con la menor puntuación en las medias, y referente a las etnias a favor de la etnia Creole con una diferencia de 1,818 en relación con la menor puntuación en las medias (en ambos, se observa el mayor nivel de consideración sobre la utilidad de las matemáticas).

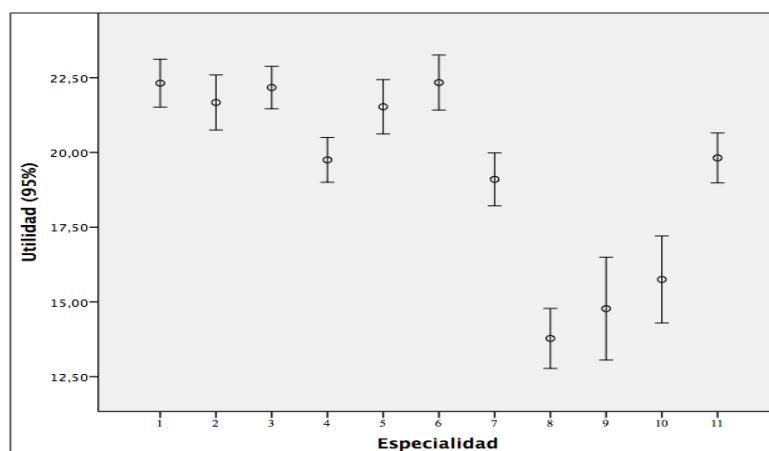
Tabla 9.66: Análisis de varianza en utilidad hacia las matemáticas

Variables	Suma de Cuadros	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Especialidad	6156,380	10	615,638	35,380	0,000
Etnia	195,269	3	65,090	3,740	0,011
Género	6,340	1	6,340	0,360	0,546
Residuos	14981,500	861	17,400		
TOTAL (Corregido)	22096,900	875			

Fuente: Elaboración propia.

A partir de estos resultados, se comparó la medias del factor utilidad por las variables especialidad, etnia y género a través de una figura barra de errores con 95% de nivel confianza. Se encontró que los estudiantes de la especialidad en Administración de Empresa son los que más reconocen la utilidad hacia las matemáticas, mientras que los estudiantes de las especialidades en Ingeniería Zootecnia, Comunicación Intercultural y Desarrollo Local son los que menos reconocen la utilidad hacia esta asignatura. En tanto, las otras especialidades obtuvieron puntuaciones por encima de la media, lo que indica una actitud neutral hacia las matemáticas. Véase la figura 9.24.

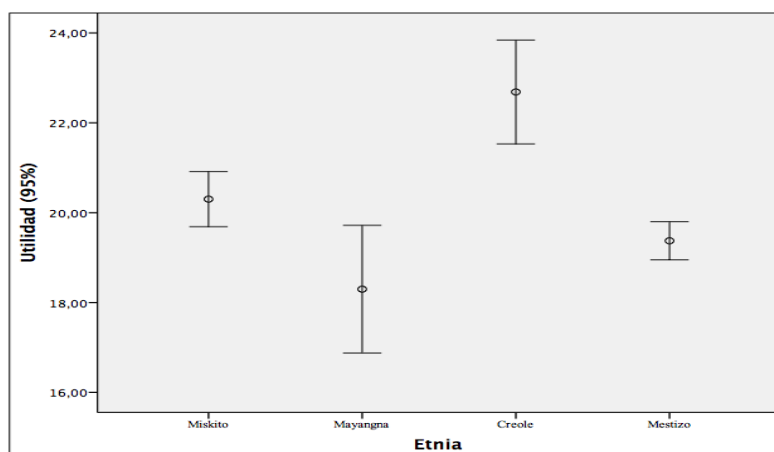
Figura 9.24: La utilidad hacia las matemáticas en las especialidades



Fuente: Elaboración propia.

En síntesis, se confirma la prueba de ANOVA, y se acepta la existencia de diferencias significativas entre las especialidades.

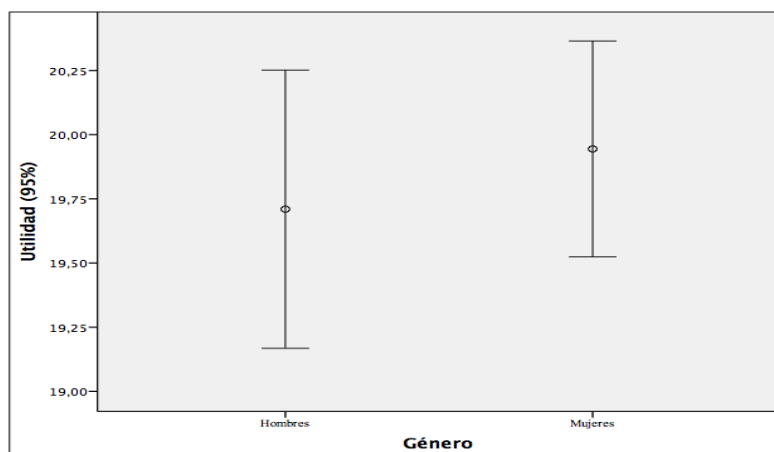
Figura 9.25: La utilidad hacia las matemáticas en las etnias



Fuente: Elaboración propia.

En la figura 9.25 se visualiza la tendencia de utilidad hacia las matemáticas en la variable etnia. Podemos apreciar que los estudiantes pertenecientes a la etnia Creole creen en la utilidad de las matemáticas, ya que su puntuación es la mayor con respecto a las otras. En cambio, los estudiantes pertenecientes a la etnia Mayangna tienden a tener una apreciación menor de la utilidad de las matemáticas. Las otras etnias están encima de la media. En definitiva, se comprueba que existen diferencias estadísticamente significativas entre las etnias, a favor de los estudiantes que pertenecen a la etnia Creole. Referente al género, la figura 9.26 confirma la igualdad entre la varianza de la variable género donde hombres y mujeres se comportan iguales.

Figura 9.26: La utilidad hacia las matemáticas en el género



Fuente: Elaboración propia.

Así mismo, los resultados de la prueba de Levene y la prueba T para igualdad entre las medias tienden a tener un valor de significancia mayor que 0.05, lo que indica igualdad entre las medias, véase la tabla 9.67. Por lo tanto, aceptamos que hombres y mujeres reconocen la utilidad de las matemáticas en su vida cotidiana y profesional de igual manera.

Tabla 9.67: Prueba T para muestra independientes en el factor utilidad con respecto a género

		Prueba de Levene de calidad de varianzas		Prueba t para la igualdad de medias						
		F	Sig.	t	gl	Sig.	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
									Inferior	Superior
Utilidad	Varianzas iguales	5,623	0,018	-0,683	874	0,495	-0,235	0,344	-0,909	0,440
	Varianzas desiguales			-0,673	752	0,501	-0,235	0,349	-0,920	0,450

Fuente: Elaboración propia.

Efecto sobre el agrado en las variables especialidad, etnia y género

La tabla 9.68 muestra las medias por mínimos cuadrados del factor agrado para cada uno de los niveles de las variables especialidad, etnia y género. También refleja los errores estándar de cada media, los cuales son una medida de la variabilidad para su muestreo. Las dos columnas de la derecha muestran intervalos de confianza del 95% para cada una de las medias.

Tabla 9.68: Medias por mínimos cuadrados para agrado con intervalos de confianza del 95%

Variables	Categoría	Casos	Media	Error Est.	L (-)	L (+)
	Media Global	876	11,770			
Especialidad	Administración de Empresas	113	13,408	0,354	12,714	14,102
	Contabilidad Pública y Auditoría	52	13,161	0,504	12,174	14,149
	Ingeniería Civil	81	13,027	0,408	12,227	13,827
	Ingeniería Agroforestal	113	11,547	0,358	10,847	12,248
	Medicina Intercultural	70	13,734	0,450	12,851	14,617
	Psicología en Contexto Multicultural	104	13,212	0,339	12,548	13,876
	Sociología con mención en Autonomía	89	10,850	0,377	10,111	11,590
	Ingeniería Zootecnia	81	9,054	0,402	8,266	9,841
	Comunicación Intercultural	40	10,186	0,539	9,129	11,243
	Desarrollo Local	40	10,119	0,552	9,037	11,200
	Informática Administrativa	93	11,167	0,357	10,467	11,867

Variables	Categoría	Casos	Media	Error Est.	L (-)	L (+)
	Media Global	876	11,770			
Etnia	Miskito	202	11,447	0,264	10,930	11,964
	Mayangna	47	11,297	0,497	10,324	12,271
	Creole	83	12,787	0,399	12,005	13,570
	Mestizo	544	11,547	0,154	11,244	11,849
Género	Hombre	372	11,917	0,224	11,478	12,356
	Mujer	504	11,622	0,204	11,221	12,023

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados de la prueba de ANOVA (Tabla 9.69) reflejan la variabilidad del factor agrado en contribuciones debidas a las variables especialidad, etnia y género. Los valores-P prueban la significancia estadística de cada uno de las variables. Puesto que los valores-P para las variables especialidad y etnia son menores que 0,05, estas variables tienen un efecto estadísticamente significativo sobre el agrado hacia las matemáticas con un 95% de nivel de confianza. Por lo tanto, rechazamos la hipótesis de igualdad entre las varianzas para las variables especialidad y etnia, y aceptamos las diferencias significativas de las especialidades a favor de la especialidad Medicina Intercultural con una diferencia de 4,680 respecto a la menor puntuación en las medias y con respecto a las etnias a favor de la etnia Creole con una diferencia de 1,490 en relación con la menor puntuación media (en ambos grupos se observa el mayor nivel de agrado).

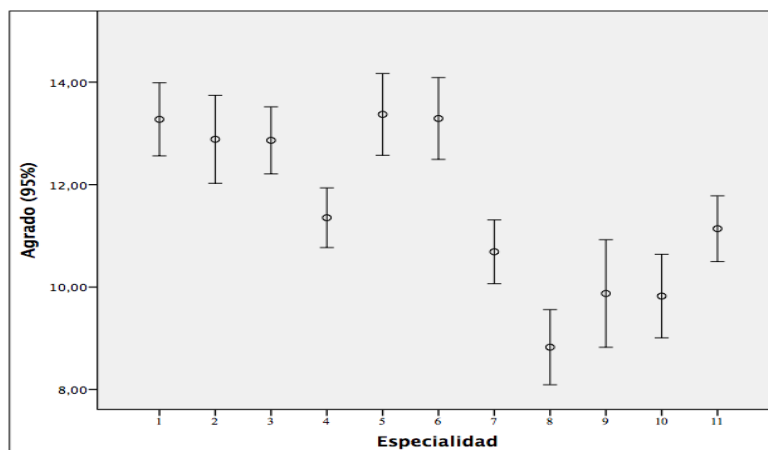
Tabla 9.69: Análisis de varianza en agrado hacia las matemáticas

Variables	Suma de Cuadros	GI	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Especialidad	1799,670	10	179,967	16,370	0,000
Etnia	109,980	3	36,660	3,330	0,019
Género	17,116	1	17,116	1,560	0,212
Residuos	9468,260	861	10,997		
TOTAL (Corregido)	11620,200	875			

Fuente: Elaboración propia.

La figura 9.27 hace referencia que la especialidad donde en (5) Medicina Intercultural y (1) Administración de Empresas poseen una tendencia más positiva de agrado hacia las matemáticas.

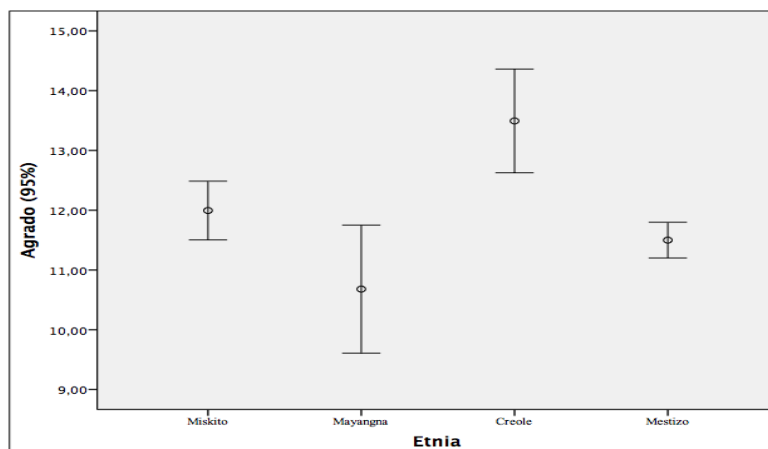
Figura 9.27: El agrado hacia las matemáticas en las especialidades



Fuente: Elaboración propia.

La especialidad en (8) Ingeniería en Zootecnia presenta la menor puntuación en la figura, seguidas de las especialidades en (9) Comunicación Intercultural, (10) Desarrollo Local y (7) Sociología con mención en Autonomía. Lo que indica que estas especialidades tienen menor agrado hacia las matemáticas. Las demás especialidades están encima de la media. En general, se confirma la existencia de diferencias estadísticamente significativas en el factor agrado a favor de la especialidad en Medicina Intercultural.

Figura 9.28: El agrado hacia las matemáticas en las etnias

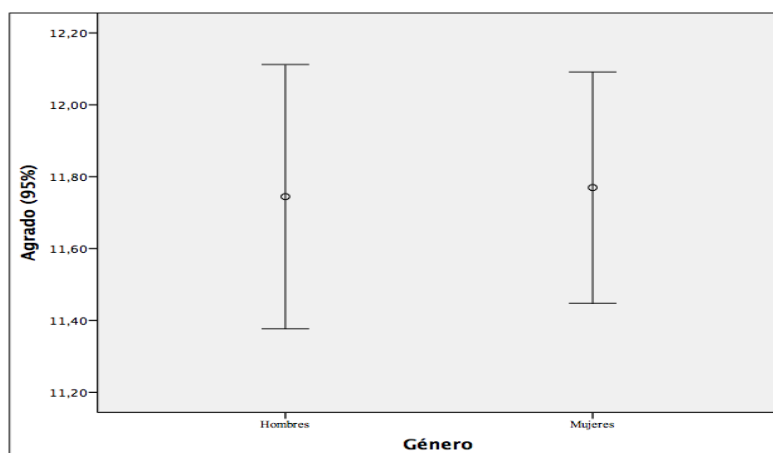


Fuente: Elaboración propia.

En la figura 9.28 se puede apreciar que los estudiantes pertenecientes a la etnia Creole obtuvieron puntuación altas en esta dimensión, lo que indica que sienten mayor agrado hacia las matemáticas. En cambio, los estudiantes pertenecientes a la etnia Mayangna tienden a tener menor agrado hacia las matemáticas. Las etnias Miskito y Mestizo reflejan puntuaciones alrededor de la media. En síntesis, se confirma los resultados de la

prueba de ANOVA y se acepta que existen diferencias significativas entre las etnias, a favor de la etnia Creole. Referente a la variable género, podemos apreciar en la figura 9.29, que se ratifica el análisis de varianza multifactorial. Poniendo de manifiesto la igualdad entre hombres y mujeres.

Figura 9.29: El agrado hacia las matemáticas en género



Fuente: Elaboración propia.

Y también confirmamos esta igualdad en la prueba t para muestras independientes, donde el valor de la significancia de la prueba Levene de calidad de varianza y la prueba T para la igualdad de medias es mayor que 0,05, véase la tabla 9.70. Por lo tanto, aceptamos que tanto hombres y mujeres tienden a tener un buen agrado hacia las matemáticas, sin observarse diferencias significativas entre ambos grupos.

Tabla 9.70: Prueba T para muestra independientes en el factor agrado con respecto a género

		Prueba de Levene de calidad de varianzas		Prueba t para la igualdad de medias					
		F	Sig.	t	gl	Sig.	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia
									Inferior Superior
Agrado	Varianzas iguales	0	0,986	-0,101	874	0,919	-0,025	0,249	-0,514 0,464
	Varianzas desiguales			-0,101	808	0,919	-0,025	0,249	-0,513 0,463

Fuente: Elaboración propia.

El efecto sobre la motivación en las variables especialidad, etnia y género

La tabla 9.71 muestra la media del factor motivación para cada uno de los niveles de las variables especialidad, etnia y género. Los errores estándar de cada media, son una medida de variabilidad en su muestreo. Los límites inferior y superior están en un intervalo de confianza del 95% para cada una de las medias.

Tabla 9.71: Medias por mínimos cuadrados para motivación con intervalos de confianza del 95%

Variables	Categoría	Casos	Media	Error Est.	L (-)	L (+)
	Media Global	876	8,569			
Especialidad	Administración de Empresas	113	9,681	0,269	9,155	10,207
	Contabilidad Pública y Auditoría	52	8,342	0,382	7,593	9,091
	Ingeniería Civil	81	9,159	0,310	8,552	9,766
	Ingeniería Agroforestal	113	8,727	0,271	8,195	9,259
	Medicina Intercultural	70	8,772	0,342	8,102	9,442
	Psicología en Contexto Multicultural	104	9,987	0,257	9,483	10,491
	Sociología con mención en Autonomía	89	8,829	0,286	8,268	9,390
	Ingeniería Zootecnia	81	7,043	0,305	6,445	7,640
	Comunicación Intercultural	40	7,652	0,409	6,850	8,454
	Desarrollo Local	40	7,473	0,419	6,652	8,293
	Informática Administrativa	93	8,600	0,271	8,069	9,131
Etnia	Miskito	202	7,860	0,200	7,468	8,252
	Mayangna	47	8,799	0,377	8,060	9,537
	Creole	83	9,505	0,303	8,911	10,099
	Mestizo	544	8,114	0,117	7,885	8,343
Género	Hombre	372	8,568	0,170	8,235	8,901
	Mujer	504	8,571	0,155	8,267	8,874

Fuente: Elaboración propia.

La prueba de análisis de varianza (Tabla 9.72) descompone la variabilidad de la motivación en contribuciones a varias variables: especialidad, etnia, género. Los valores-P prueban la significancia estadística de cada una de las variables. Los resultados muestran que las variables especialidad y etnia presentan valores-P menores que 0,05. Estas variables tienen un efecto estadísticamente significativo sobre el factor motivación con un 95% de

nivel de confianza. Por tanto, rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la existencias de diferencias estadísticamente significativas en las especialidades a favor de la especialidad Psicología en Contextos Multiculturales con una diferencia de 2,944 con respecto a la menor puntuación media, y en la etnias a favor de la etnia Creole con una diferencia de 1,645 en relación con la menor puntuación media.

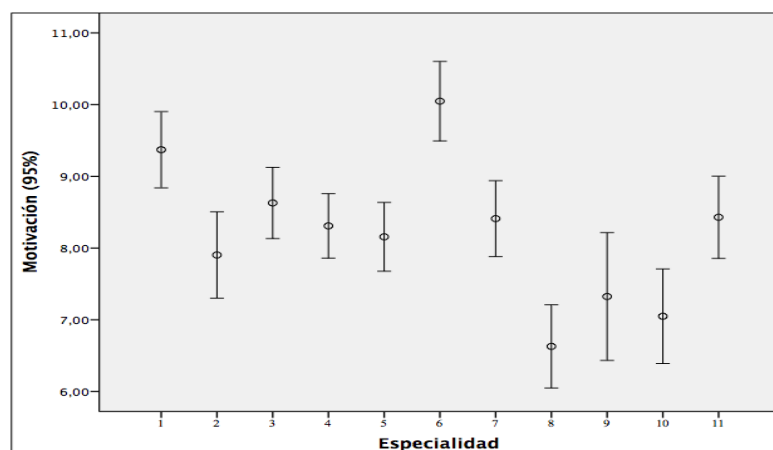
Tabla 9.72: Análisis de varianza en motivación hacia las matemáticas

Variables	Suma de Cuadros	GI	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Especialidad	584,370	10	58,437	9,230	0,000
Etnia	155,516	3	51,839	8,190	0,000
Género	0,001	1	0,001	0,000	0,990
Residuos	5449,250	861	6,329		
TOTAL (Corregido)	6385,880	875			

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 9.30 se representan las diferencias significativas entre las especialidades. Se puede apreciar que la especialidad en (6) Psicología en contexto Multiculturales tiene una puntuación alta en este factor, lo que muestra que los estudiantes de dicha especialidad se sienten más motivados en aspectos referidos a las matemáticas que los de otras especialidades. En cambio, los estudiantes de las especialidades (8) Ingeniería en Zootecnia, (9) Comunicación Intercultural y (10) Desarrollo Local son los que obtuvieron menores puntuaciones. Esto significa que estos estudiantes no se siente motivación hacia actividades en las que se involucran procesos matemáticos. El resto de las especialidades alcanzaron puntuaciones por encima de la media.

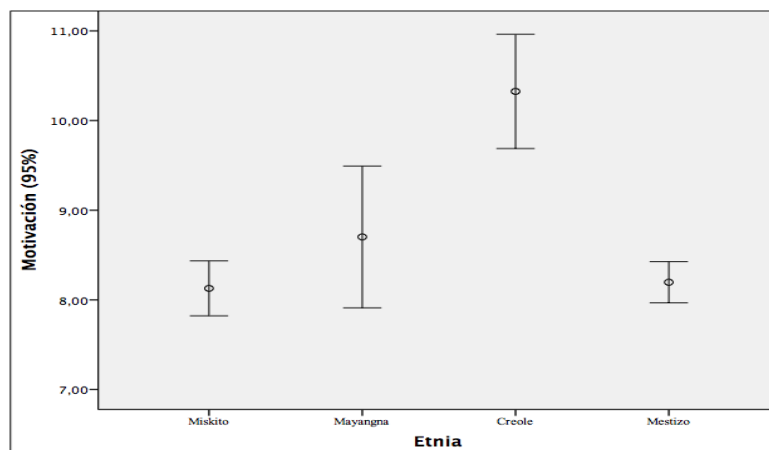
Figura 9.30: La motivación hacia las matemáticas en las especialidades



Fuente: Elaboración propia.

La figura 9.31 muestra las diferencias estadísticamente significativas entre las etnias. Se puede apreciar que los estudiantes pertenecientes a la etnia Creole son los que puntuaciones más altas lograron en este factor, seguidos por las etnias Mayangna y Mestizo. Sin embargo, los estudiantes de la etnia Miskito son los que presentan una tendencia por debajo de la media, lo que revela que estos estudiantes no se sienten motivados en procesos relacionados con las matemáticas. Por tanto, se confirma la prueba de ANOVA y se acepta la existencia de diferencias estadísticamente significativas a favor de la etnia Creole.

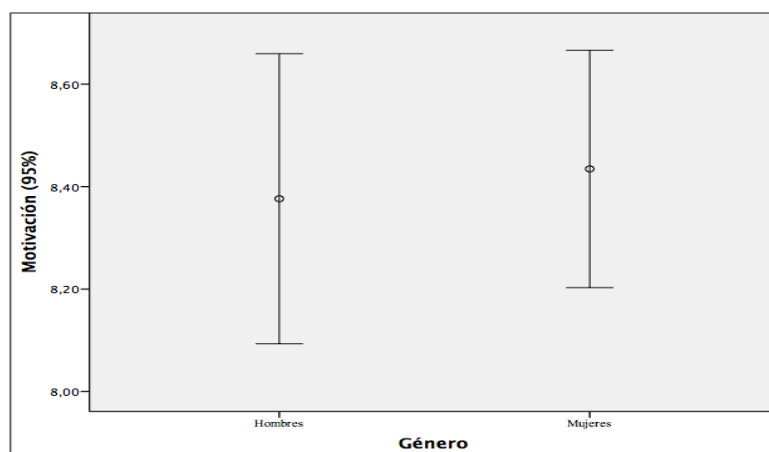
Figura 9.31: La motivación hacia las matemáticas en las etnias



Fuente: Elaboración propia.

Referente al efecto en la variable género apreciamos en la figura 9.32 la igualdad entre las varianzas.

Figura 9.32: La motivación de las matemáticas en el género



Fuente: Elaboración propia.

Por lo anterior, se realizó una prueba T para muestras independientes para verificar y confirmar la hipótesis de igualdad entre las medias. Los resultados del valor de significancia de la prueba de Levene y la prueba T para la igualdad son mayores que 0,05. Por lo tanto, aceptamos que tanto hombres como mujeres se sienten motivados en procesos relacionados a las matemáticas, pero sin observarse diferencias significativas entre un grupo y el otro. Véase tabla 9.73.

Tabla 9.73: Prueba T para muestra independientes en el factor motivación con respecto a género

		Prueba de Levene de calidad de varianzas		Prueba t para la igualdad de medias						
		F	Sig.	t	gl	Sig.	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
									Inferior	Superior
Motivación	Varianzas iguales	0,637	0,425	-0,315	874	0,753	-0,058	0,185	-0,421	0,304
	Varianzas desiguales			-0,313	777	0,755	-0,058	0,186	-0,423	0,307

Fuente: Elaboración propia.

El efecto sobre la confianza en las variables especialidad, etnia y género

La tabla 9.74 muestra las medias por mínimos cuadrados del factor confianza para cada uno de los niveles de las variables especialidad, etnia y género. También muestra los errores estándar de cada media, los cuales son una medida de la variabilidad en su muestreo. Las dos columnas de la derecha muestran intervalos de confianza del 95% para cada una de las medias.

Tabla 9.74: Medias por mínimos cuadrados para confianza con intervalos de confianza del 95%

Variables	Categoría	Casos	Media	Error Est.	L (-)	L (+)
	Media Global	876	10,538			
Especialidad	Administración de Empresas	113	12,248	0,266	11,726	12,769
	Contabilidad Pública y Auditoría	52	12,626	0,379	11,884	13,368
	Ingeniería Civil	81	12,521	0,307	11,919	13,122
	Ingeniería Agroforestal	113	10,939	0,269	10,412	11,465
	Medicina Intercultural	70	12,571	0,339	11,907	13,234
	Psicología en Contexto Multicultural	104	12,040	0,255	11,541	12,539
	Sociología con mención en Autonomía	89	10,730	0,284	10,174	11,285
	Ingeniería Zootecnia	81	6,551	0,302	5,959	7,143
	Comunicación Intercultural	40	7,295	0,405	6,501	8,090
	Desarrollo Local	40	7,223	0,415	6,410	8,035
	Informática Administrativa	93	11,170	0,268	10,644	11,696

Variables	Categoría	Casos	Media	Error Est.	L (-)	L (+)
	Media Global	876	10,538			
Etnia	Miskito	202	10,090	0,198	9,701	10,478
	Mayangna	47	10,624	0,373	9,892	11,355
	Creole	83	10,838	0,300	10,250	11,427
	Mestizo	544	10,599	0,116	10,372	10,826
Género	Hombre	372	10,612	0,168	10,282	10,942
	Mujer	504	10,463	0,154	10,162	10,764

Fuente: Elaboración propia.

La tabla ANOVA (Tabla 9.75) descompone la variabilidad en el factor confianza en contribuciones debidas a varias variables: especialidad, etnia y género. Los valores-P prueban la significancia estadística de cada uno de las variables. Puesto que un valor-P es menor que 0,05, esta variable tiene un efecto estadísticamente significativo sobre el factor confianza con un 95% de nivel de confianza. Por lo tanto, rechazamos la hipótesis de igualdad entre las varianzas para la variable especialidad y aceptamos las diferencias significativas de las especialidades a favor de la especialidad en Contabilidad Pública y Auditoría con una diferencia de 6,075 en relación con la menor puntuación media.

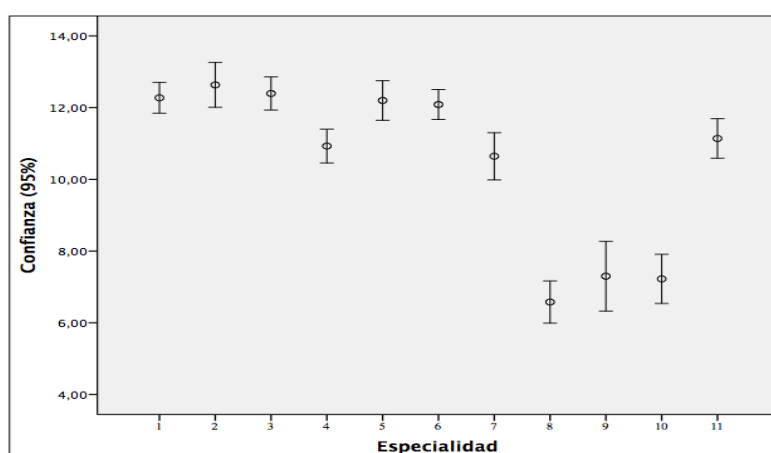
Tabla 9.75: Análisis de varianza en confianza hacia las matemáticas

Variables	Suma de Cuadrados	GI	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Especialidad	3229,750	10	322,975	52,000	0,000
Etnia	38,489	3	12,830	2,070	0,103
Género	4,358	1	4,358	0,700	0,402
Residuos	5348,180	861	6,212		
TOTAL (Corregido)	8787,670	875			

Fuente: Elaboración propia.

La figura 9.33 muestra las diferencias significativas entre las especialidades y también hace notar que los estudiantes de la especialidad en (2) Contabilidad Pública y Auditoría tienden a tener más confianza cuando se enfrentan a procesos asociados a las matemáticas que el resto de estudiantes de otras especialidad. En cambio, los estudiantes de las especialidades en (8) Ingeniería en Zootecnia, (9) Comunicación Intercultural y (19) Desarrollo Local obtuvieron puntuaciones menores, los que nos induce a afirmar que estos estudiantes no tienen confianza cuando se presentan a desafíos que involucran procesos matemáticos. Las otras especialidades obtuvieron puntuaciones por encima de la media. En suma, confirmamos la existencia de diferencias estadísticamente significativas en las especialidades a favor de la especialidad en Contabilidad Pública y Auditoría.

Figura 9.33: La confianza hacia las matemáticas en las especialidades



Fuente: Elaboración propia

Por otra parte, para confirmar la prueba de ANOVA, se realizó una prueba de T para la igualdad de varianza, obteniendo, en primer lugar, que la probabilidad asociada al estadístico de Levene (0,040; 0,001; 0,000) es menor que 0,05, por lo que se rechaza la hipótesis de igualdad de varianza, y consecuentemente, el estadístico (t) toma los valores -2,830; -4,073; 4,540 y tiene asociado un nivel crítico bilateral de 0,005; 0,000; 0,000. Este valor nos informó del grado de compatibilidad existente entre la diferencia observada entre las medias muestrales de los grupos comparados y la hipótesis nula de que las medias poblacionales son iguales. Puesto que 0,000 es menor que 0,05, entonces se rechaza la hipótesis de igualdad de medias y, razonablemente, se puede concluir que las puntuaciones en el factor confianza entre Miskito-Creole, Mayangna-Creole y Creole-Mestizo no son iguales. Sin embargo, en los pares Miskito-Mayangna, Miskito-Mestizo y Mayangna-Mestizo los resultados muestran que las medias se comparten de igual manera. Véase la tabla 9.76.

Tabla 9.76: Prueba T para muestra independientes en la dimensión confianza con respecto a la etnia

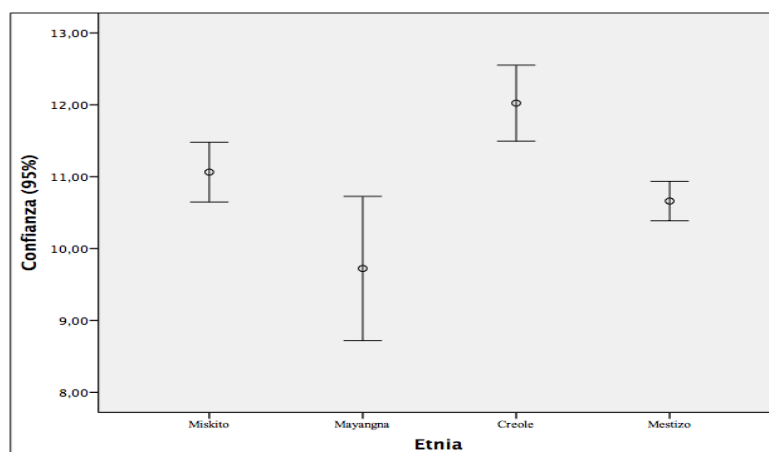
		Prueba de Levene de calidad de varianzas		Prueba t para la igualdad de medias						
		F	Sig.	t	gl	Sig.	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
									Inferior	Superior
Confianza Miskito –Mayangna	Varianzas iguales	2,862	0,092	2,688	247	0,008	1,341	0,499	0,358	2,323
	Varianzas desiguales			2,477	63	0,016	1,341	0,541	0,259	2,423
Confianza Miskito –Creole	Varianzas iguales	4,255	0,040	-2,590	283	0,010	-0,960	0,371	-1,689	-0,230
	Varianzas desiguales			-2,830	188	0,005	-0,960	0,339	-1,629	-0,291

		Prueba de Levene de calidad de varianzas		Prueba t para la igualdad de medias						
		F	Sig.	t	gl	Sig.	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
									Inferior	Superior
Confianza Miskito – Mestizo	Varianzas iguales	4,704	0,061	1,532	744	0,126	0,403	0,263	-0,113	0,918
	Varianzas desiguales			1,592	388	0,112	0,403	0,253	-0,095	0,900
Confianza Mayangna – Creole	Varianzas iguales	11,203	0,001	-4,470	128	0,000	-2,301	0,515	-3,319	-1,282
	Varianzas desiguales			-4,073	73	0,000	-2,301	0,565	-3,427	-1,175
Confianza Mayangna – Mestizo	Varianzas iguales	0,385	0,535	-1,887	589	0,060	-0,938	0,497	-1,915	0,038
	Varianzas desiguales			-1,812	53	0,076	-0,938	0,518	-1,977	0,100
Confianza Creole – Mestizo	Varianzas iguales	14,080	0,000	3,658	625	0,000	1,362	0,372	0,631	2,094
	Varianzas desiguales			4,540	132	0,000	1,362	0,300	0,769	1,956

Fuente: Elaboración propia.

En general, se asume una tendencia positiva de confianza hacia los procesos resolución de problemas matemáticos. Y la figura 9.34 lo confirma.

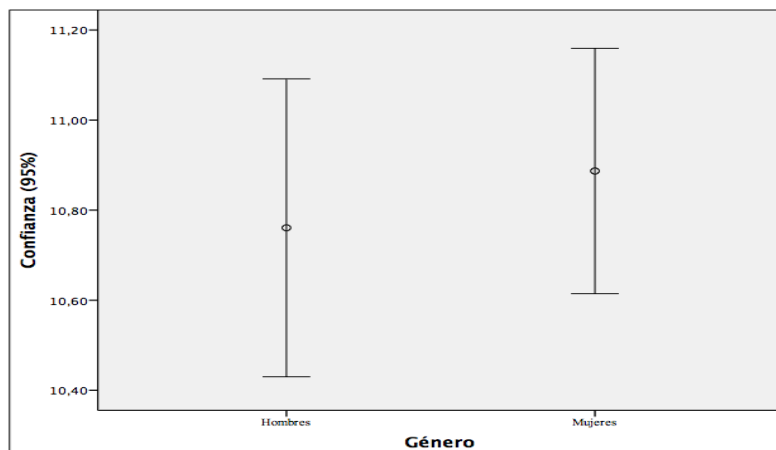
Figura 9.34: La confianza hacia las matemáticas en las etnias



Fuente: Elaboración propia.

Referente al género, se confirma la prueba de análisis de varianza multifactorial, se puede observar en la figura 9.35 que la distribuciones entre hombres y mujeres son iguales.

Figura 9.35: La confianza hacia las matemáticas en el género



Fuente: Elaboración propia.

La prueba T de muestras independientes ratifica los resultados tanto en la prueba de ANOVA como en la figura anterior. Esto se debe a que el valor de significancia de la prueba de Levene de calidad de varianza es mayor que 0,05, así como la significancia de la prueba T para la igualdad de medias con intervalo de confianza del 95%. Por lo tanto, se acepta que los hombres y las mujeres poseen confianza al enfrentarse a situaciones que involucren procesos matemáticos, no siendo este nivel de confianza diferente entre hombres y mujeres. Véase en la tabla 9.77.

Tabla 9.77: Prueba T para muestra independientes el factor confianza con respecto al género

		Prueba de Levene de calidad de varianzas		Prueba t para la igualdad de medias						
		F	Sig.	t	gl	Sig.	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
									Inferior	Superior
Confianza	Varianzas iguales	2,862	0,092	2,688	247	0,008	1,341	0,499	0,358	2,323
	Varianzas desiguales			2,477	63	0,016	1,341	0,541	0,259	2,423

Fuente: Elaboración propia.

9.4.4 A manera de resumen

A la vista de los resultados obtenidos podemos afirmar que la actitud de los estudiantes universitarios respecto a la matemática es media, globalmente con una puntuación total de $M=76,567$, y en sus distintos factores, se caracterizan por lo siguiente: en el factor ansiedad la media fue $M=25,895$, que es algo positivo, teniendo en cuenta que, a mayores puntuaciones en el factor ansiedad, esta es menor; la utilidad refleja una puntuación de $M=19,895$ puntualizando al valor que el estudiantado otorga a las matemáticas, así como la utilidad de la materia para su futura vida profesional; el agrado con una puntuación media de $M=11,759$ considerando que las matemáticas son agradables y estimulantes; la motivación con una puntuación media de $M=8,410$, interpretándose como la motivación que sienten los estudiantes hacia el estudio y la utilización de las matemáticas; y la confianza con una puntuación media de $M=10,833$, siendo el sentimiento de confianza que provoca la habilidad matemática de los estudiantes.

El estudio de relaciones entre los diversos factores muestran, características importante, por ejemplo: al crecer el agrado crece la utilidad, y al crecer la utilidad crece la confianza, que están relacionados de forma directamente proporcional, lo cual es positivo al tratar de resolver un problema matemático; la ansiedad disminuye con los factores agrado, utilidad, confianza y motivación, y esto se refleja, porque a mayores puntuaciones en el factor ansiedad, esta es menor. Otras características importantes, es el valor subjetivo atribuido a los procesos de resolución de problemas matemáticos y que los estudiantes activan emociones y sentimientos de aceptación o rechazo ante la presencia de las matemáticas.

En este particular, el análisis sobre los efectos en las variables especialidad, género y etnia en los factores actitudinales nos indica que los estudiantes que provienen de las especialidades en Administración de Empresa y Contabilidad Pública y Auditoría, y que son de la etnia Creole poseen actitudes positivas hacia las matemáticas, mientras que los estudiantes que provienen de las especialidades en Ingeniería en Zootecnia, Comunicación Intercultural, Desarrollo Local y de la etnia Mayangna son los que tienen menos actitudes positivas hacia las matemáticas o actividades que involucren procesos matemáticos. Destacamos que tanto hombres y mujeres tienden a poseer las misma actitud hacia las matemáticas. Resaltamos que las otras especialidades y etnias involucradas en el proceso de investigación tienen una tendencia positiva hacia las matemáticas. Concluimos que la utilidad, el agrado, la motivación y la confianza pueden ser los que lleven a una menor ansiedad, pero también, puede ser, el tener menor ansiedad implique que aumente la utilidad, el agrado, la motivación y la confianza hacia las matemáticas, este planteamiento, sería oportuno, profundizarlo en futuras investigaciones.

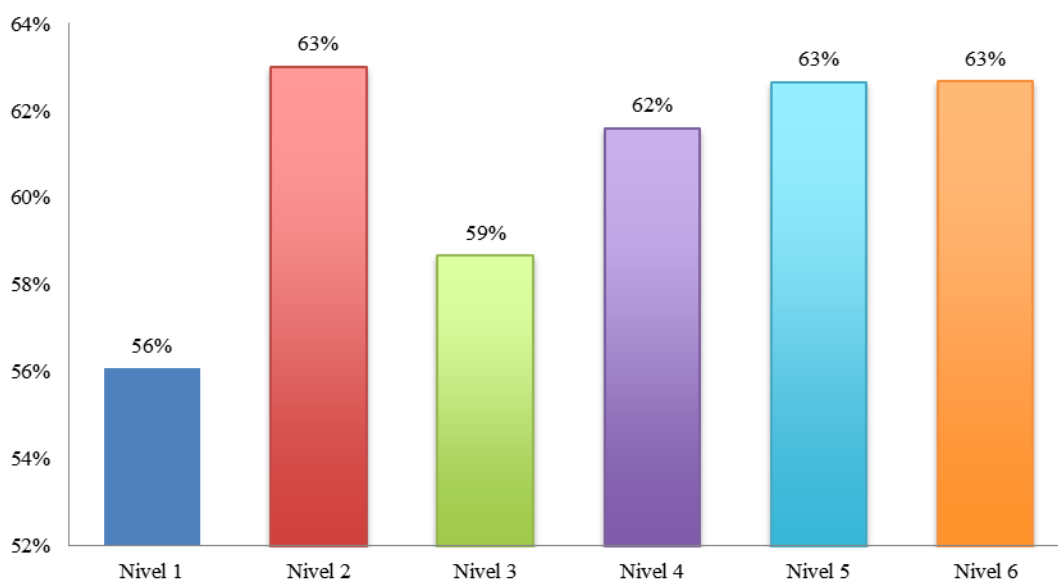
9.5 LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN TÉRMINOS DE LOS PROCESOS MATEMÁTICOS Y SU RELACIÓN CON LAS ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS

Para realizar este análisis partimos de la idea que un estudiante comprende el significado de un objeto –o que ha “captado el significado” de un concepto por ejemplo- si fuese capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas dentro de la institución correspondiente (Godino & Batanero, 1994, p. 342). En este sentido, para interpretar el significado de la comprensión nos hemos centrado, por una parte, en un análisis de los tipos de objetos y procesos que los estudiantes utilizan al resolver problemas matemáticos en un contexto algebraico. Y por otra parte, en las teorías de Collis (1980), Küchemann (1981), Kieran (1992), Duval (1993), Socas et al. (1996), Palarea y Socas (1998) Duval (1999), Bolea et al. (2001), Socas (2001), Socas (2007), Cajaraville, et al (2012), centradas en los estadios de desarrollo del pensamiento matemático²¹ y, específicamente, en los niveles de comprensión del álgebra. En esta línea se encontró una cierta zona de articulación teórica con los niveles de complejidad en los procesos de resolución de problemas matemáticos de NCTM (2000), Niss y Jensen (2002), Niss (2002), OECD (2004) y TIMSS (2011) bajo los supuestos de Rico (2006), que considera como potenciales a los procesos matemáticos –pensar y razonar, argumentar, comunicar, representar, modelar, plantear y resolver problemas- para abordar las tareas matemáticas.

Desde esta perspectiva, los procesos matemáticos se evaluaron en seis niveles de complejidad que hacen referencia a la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas. Estos tres términos, formular, emplear e interpretar, ofrecen una estructura útil y significativa para organizar los procesos matemáticos que describen lo que hacen los individuos para relacionar el contexto de un problema con las matemáticas y, de eso modo, resolverlo. Por tanto, en la figura 9.36 mostramos los resultados promedio de la evaluación de los seis niveles de complejidad en los procesos de resolución de problemas matemáticos.

²¹ Estadios del pensamiento matemático: estadio inicial en operaciones concretas; estadio medio operaciones formales; estadio de generalización concreta, estadio de las operaciones formales y niveles de comprensión del álgebra.

Figura 9.36: Promedio alcanzados en los niveles de complejidad de resolución de problemas



Fuente: Elaboración propia.

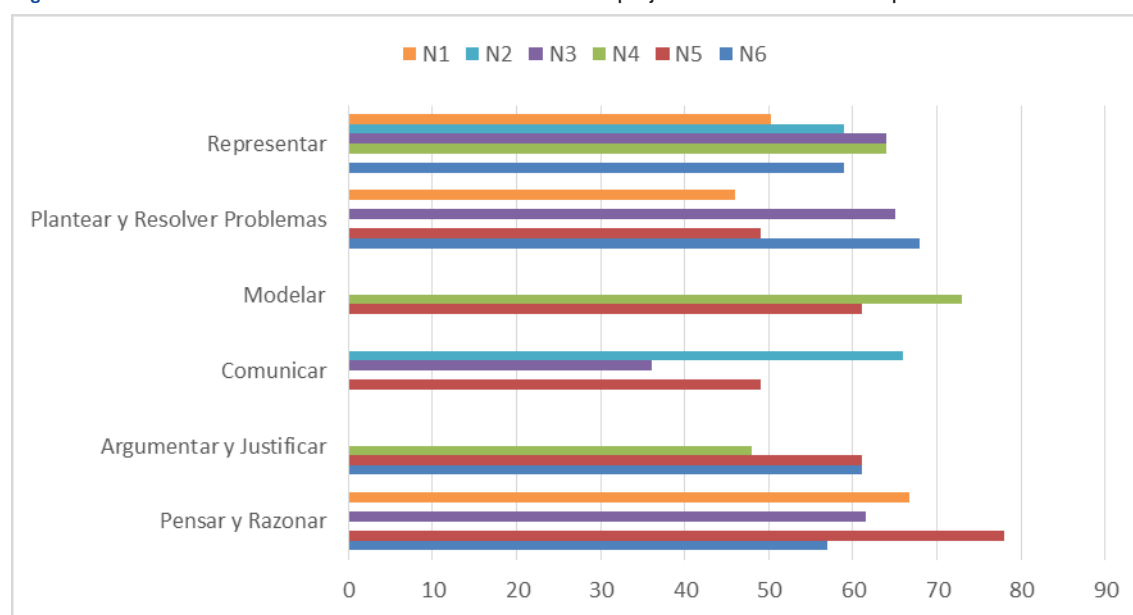
En la figura observamos que en el nivel 1, el 56% de los estudiantes saben responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados. En el nivel 2, el 63% de los estudiantes saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional. En el nivel 3, el 59% de los estudiantes saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos.

En el nivel 4, el 62% de los estudiantes pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluidas las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. En el nivel 5, el 63% de los estudiantes saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden selec-

cionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. En el nivel 6, el 63% de los estudiantes saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de manera flexible.

Basándonos en los patrones observados en el análisis de las configuraciones cognitivas, en la figura 9.37 se muestra la tendencia de los procesos matemáticos en los niveles de complejidad de resolución de problemas matemáticos. Esto nos ayudó a entender las dificultades en los niveles.

Figura 9.37: Procesos matemáticos en los niveles de complejidad de resolución de problemas



Fuente: Elaboración propia.

La figura anterior muestra la tendencia del proceso pensar y razonar en los niveles de complejidad de resolución de problemas matemáticos (N1, N3, N5, N6). Referente a este proceso podemos decir que el 71% de los estudiantes pueden realizar tareas que involucren subprocesos como: responder a cuestiones en contextos muy conocidos; responder a cuestiones en contextos muy poco familiares; responder a cuestiones complejas en multitud de contextos; y formar y relacionar conceptos. Véase la tabla 9.78.

Tabla 9.78: Descripciones resumidas del proceso pensar y razonar

Subprocesos	Tareas específicas que los estudiantes deben ser capaces de realizar	Porcentaje
Responder a cuestiones en contextos muy conocidos	Sustituir correctamente los números para aplicar un algoritmo numérico o fórmula algebraica sencilla	68
	Realizar cálculos sencillos que implican relaciones entre dos variables conocidas.	73
	Utilizar una representación bidimensional dada para contar o calcular elementos de un objeto.	59
Responder a cuestiones en contextos muy poco familiares	Llevar a cabo cálculos explícitamente descritos que comprenden procesos secuenciales.	81
	Utilizar los datos relevantes de la descripción de una situación compleja y realizar los cálculos correspondientes.	65
Responder a cuestiones complejas en multitud de contexto	Realizar cálculos sencillos que implican relaciones entre una variable conocida. Situación algebraica en contexto de la propiedad conmutativa.	78
Formar y relacionar conceptos	Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando restricciones del problema.	73
Promedio de los estudiantes que pueden realizar tareas mínimas en el proceso de pensar y razonar		71

Fuente: Elaboración propia.

Pensar en matemática es construir conocimiento matemático en situaciones donde tenga sentido, experimentar, intuir, relacionar conceptos y abstraer. Sin embargo, los estudiantes presentaron una mayor dificultad en utilizar una representación bidimensional dada para contar o calcular elementos de un objeto. Esto se produce porque los estudiantes no se aproximaron a razonar matemáticamente, es decir, a realizar deducciones e inducciones que ayudaran a particularizar, generalizar y argumentar las decisiones, así como los procesos y las técnicas.

El proceso de argumentar y justificar (figura 9.37) se observa que la mayor tendencia se alcanzó en los niveles de complejidad de resolución de problemas matemáticos N4, N5, N6. El 62% de los estudiantes fueron capaces de elaborar argumentos basados en sus acciones, formular razonamientos desarrollados y elaborar argumentos desde su propia reflexión. Véase la tabla 9.79.

Tabla 9.79: Descripciones resumidas del proceso de argumentar y justificar

Subprocesos	Tareas específicas que los deben ser capaces de realizar	Porcentaje
Elaborar argumentos basados en sus acciones	Interpretar y conocer representaciones complejas para resolver un problema práctico.	64
Formular los razonamientos desarrollados y elaborar argumentos desde su propia reflexión	Reflexionar, interpretar y explicar información matemática compleja en el contexto de una situación real desconocida.	61
Promedio de los estudiantes que pueden realizar tareas mínimas en el proceso de argumentar		62

Fuente: Elaboración propia.

El proceso de argumentar y justificar se concreta como el conjunto de habilidades, conocimientos y actitudes dirigidas a la explicación de determinados procesos. No obstante, los estudiantes presentaron la mayor dificultad al realizar una reflexión sobre las relaciones entre una fórmula algebraica y los datos subyacentes, así como para interpretar y explicar información matemática compleja en el contexto de una situación real desconocida. Dichos problemas influyen en la manera en que los estudiantes explican la solución de un problema y, también, en cómo justifican y demuestran su solución.

En la figura 9.37 observamos que el proceso de comunicar presentó dificultades en los niveles de complejidad de resolución de problemas matemáticos, pero sobre todo en N2. Las razones de este hecho pueden encontrarse en sólo el 58% de los estudiantes realizaron tareas de los subprocesos de describir resultados obtenidos, realizar explicaciones sencillas y comunicar conclusiones con precisión. El proceso de comunicar en matemáticas se define como la capacidad de expresarse tanto de manera oral, como escrita con referencia a asuntos con contenidos matemáticos. Las mayores dificultades se producen porque los estudiantes no realizaron tareas como aplicar cálculos sencillos para resolver problemas en una conversión de registro en un contexto geométrico y aplicar algoritmos rutinarios para resolver problemas geométricos. Véase la tabla 9.80.

Tabla 9.80: Descripciones resumidas del proceso de comunicar

Subprocesos	Tareas específicas que los estudiantes deben ser capaces de realizar	Porcentaje
Describir resultados obtenidos	Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.	72
	Interpretar y aplicar formulas verbales y manejar y utilizar formulas lineales que represente relaciones del mudo real.	48
	Sustituir correctamente los números para explicar la relaciones entre dos variables desconocidas.	63
	Interpretar las relaciones entre dos variables a través de la sustitución de un número conocido.	81

Subprocesos	Tareas específicas que los estudiantes deben ser capaces de realizar	Porcentaje
Realizar explicaciones sencillas	Aplicar algoritmos rutinarios para resolver problemas geométricos.	36
Comunicar conclusiones con precisión	Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones	49
Promedio de los estudiantes que pueden realizar tareas mínimas en el proceso de comunicar		58

Fuente: Elaboración propia.

Así como simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones. Para que los estudiantes mejoren este proceso matemático es necesario abarcar las capacidades de la forma en que se expresa y representa información matemática y la manera en que se interpreta dicha información (Niss, 2002), esto ayuda a los estudiantes a organizar y consolidar su pensamiento matemático, debido a que representa una de las claves para la profundización de la comprensión matemática (Silbey, 2003).

Observamos en la figura 9.37 que modelar es un proceso matemático que se manifiesta en los niveles de complejidad de resolución de problemas matemáticos, específicamente en N4 y N5. Esto es así porque el 67% de los estudiantes respondieron correctamente a tareas que relacionan los subprocesos de usar modelos explícitos en situaciones concretas y desarrollar y usar modelos en múltiples situaciones. Véase la tabla 9.81.

Tabla 9.81: Descripciones resumidas del proceso de modelar

Subprocesos	Tareas específicas que los estudiantes deben ser capaces de realizar	Porcentaje
Usar modelos explícitos en situaciones concretas	Utilizar representaciones múltiples para resolver un problema práctico, es decir, interpretar y comprender significados.	73
Desarrollar y usar modelos en múltiples situaciones	Reflexionar sobre la relación entre una fórmula algebraica y los datos subyacentes.	61
Promedio de los estudiantes que pueden realizar tareas mínimas en el proceso de modelar		67

Fuente: Elaboración propia.

En el proceso de modelar un problema matemático, consistió en que, los estudiantes reflexionen sobre la relación entre una fórmula algebraica y los datos subyacente, ya que para modelar matemáticamente los estudiantes tienen que entender las matemáticas como un conjunto de ideas y formas de actuar que llevan a obtener modelos e identificar relaciones y estructuras (Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez & Escorial, 2012).

El proceso de plantear y resolver problema surge en los niveles de complejidad de resolución de problemas matemáticos N1, N3, N4 y N6, véase la figura 9.37. Y esto es porque el 52% de los estudiantes son capaces de realizar subprocesos como: resolver problemas con datos sencillos, seleccionar y aplicar estrategias sencillas, seleccionar, comparar y evaluar estrategias y generalizar resultados de problemas. Véase la tabla 9.82.

Tabla 9.82: Descripciones resumidas del proceso de plantear y resolver problemas

Subprocesos	Tareas específicas que los estudiantes deben ser capaces de realizar	Porcentaje
Resolver problemas con datos sencillos	Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero, en un contexto aditivo y multiplicativo.	46
Seleccionar y aplicar estrategias sencillas y Seleccionar, comparar y evaluar estrategias	Utilizar los datos relevantes de la descripción de una situación compleja y realizar los cálculos correspondientes.	42
Generalizar resultados de problemas	Usar comprensivamente el álgebra para resolver problemas; capacidad de manejar expresiones algebraicas para traducir una situación del mundo real.	57
	Aplicar la comprensión geométrica profunda para trabajar con patrones complejos y generalizados.	63
Promedio de los estudiantes que pueden realizar tareas mínimas en el proceso de plantear y resolver problemas		52

Fuente: Elaboración propia.

Las dificultades en el proceso de plantear y resolver problema se acentúa más con la necesidad de concebir y elaborar una estrategia que transforme la información dada para llegar a una conclusión. Incluso con el uso de una estrategia para encontrar una solución exhaustiva o una conclusión generalizadora. Por tales razones, es necesario cultivar en los estudiantes la habilidad para resolver lo desconocido, con el objetivo que les permita comprender, identificar, plantear y resolver distintas situaciones del mundo real al mundo de las matemáticas utilizando una variedad de métodos (Niss, 2002).

Por otra parte, el proceso de representar emerge en los niveles de complejidad de resolución de problemas matemáticos N1, N2, N3, N4, N6 (véase en la figura 9.37). Este proceso es necesario para los estudiantes porque les ayuda a diseñar una representación que refleje los aspectos clave de una situación compleja. El 56% de los estudiantes poseen esta habilidad que se refleja en los subprocesos siguientes: Leer datos directamente de tablas o figuras, usar un único tipo de representación, conocer y usar diferentes sistemas de representación, vincular diferentes sistemas de representación incluyendo el simbólico y relacionar y traducir con fluidez diferentes sistemas de representación. Véase en la tabla 9.83.

Tabla 9.83: Descripciones resumidas del proceso de representar

Subprocesos	Tareas específicas que los estudiantes deben ser capaces de realizar	Porcentaje
Leer datos directamente de tablas o figuras	Determinar la cantidad desconocida que aparece en el problema realizando operaciones algebraicas y aritméticas.	43
	Identificar los cálculos simples necesarios para resolver un problema sencillo en un contexto multiplicativo.	45
	Utilizar términos y definiciones técnicas básicas y aplicar conceptos geométricos básicos.	46
	Realizar cálculos sencillos que incluyan las operaciones aditivas.	67
Usar un único tipo de representación	Realizar cálculos sencillos que impliquen operaciones aditivas: operaciones de las variables en campo numérico.	70
	Interpretar y aplicar formulas verbales y manejar y utilizar formulas lineales que represente relaciones del mundo real.	69
	Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.	38
Conocer y usar diferentes sistemas de representación	Aplicar algoritmos rutinarios para relacionar diferentes representaciones de objetos.	70
	Interpretar el lenguaje algebraico en los cuales se oculte algún algoritmo sencillo y aplicar dicho algoritmo.	58
Vincular diferentes sistemas de representación incluyendo el simbólico	Analizar un modelo matemático dado que implique una fórmula compleja, es decir, deducir reglas y métodos generales en secuencias de familias de problemas.	48
Relacionar y traducir con fluidez diferentes sistemas de representación	Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica en situaciones algebraicas en contexto aditivo y multiplicativo.	59
Promedio de los estudiantes que pueden realizar tareas mínimas en el proceso de representar		56

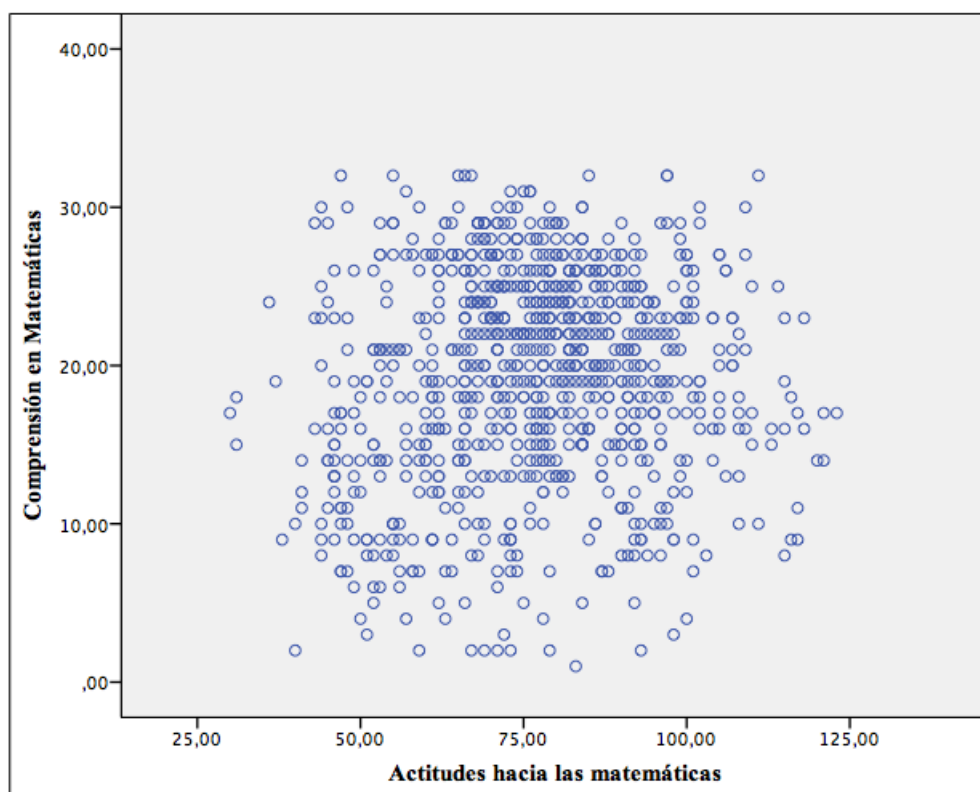
Fuente: Elaboración propia.

Las dificultades en este proceso matemático se sitúan en tareas específicas cómo: determinar la cantidad desconocida que aparece en el problema realizando operaciones algebraicas y aritméticas; identificar los cálculos simples necesarios para resolver un problema sencillo en un contexto multiplicativo; utilizar términos y definiciones técnicas básicas y aplicar conceptos geométricos básicos; interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor; y analizar un modelo matemático dado que implique una formula compleja. La exigencia de este proceso matemático para los estudiantes implica la habilidad para utilizar y relacionar

los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemáticos (Castro, et al, 2012). Esto les ayudaría a comprender y utilizar una representación no estándar que requiere una notable descodificación e interpretación; diseñar una representación que refleje los aspectos clave de una situación compleja; o comparar o valorar distintas representaciones.

Las dificultades de comprensión de los objetos matemáticos en los niveles de complejidad de resolución de problemas matemáticos aumenta con el grado de interpretación, representación, procesamiento complejo y argumentación que se exige de los estudiantes. Pero también, existe una estrecha relación con las actitudes hacia las matemáticas, ya que el nivel crítico de correlación ordinal de Kendall entre el nivel comprensión de los objetos matemáticos²² y las actitudes hacia las matemáticas²³ es de 0,055 con un nivel de significancia de 0,019, lo que indica la dos variables se correlacionan en sentido directo, es decir, existe una correlación significativa. La figura 9.38 confirma la relación lineal, esto quiere decir, que al crecer la actitudes hacia las matemáticas crece la comprensión de los objetos matemáticos ya que están relacionados de forma directamente proporcional y muestren un coeficiente de correlación positivo.

Figura 9.38: Relación entre el nivel comprensión y las actitudes hacia las matemáticas



Fuente: Elaboración propia.

²² Puntuación total en el cuestionario cognitivo por parte de los estudiantes.

²³ Puntuación total en la escala de actitud hacia las matemáticas por parte de los estudiantes.

Para corroborar lo anterior, se calculó el coeficiente de correlación ordinal de Kendall entre los factores asociados a las actitudes hacia las matemáticas y el nivel de comprensión de los objetos matemáticos. En este caso, puesto que la puntuación de cada ítem solo varía de 1 a 5 y se trata de una escala ordinal, para ser más conservadores, hemos preferido tratar los datos como ordinales, ya que la diferencia, por ejemplo, entre “Fuertemente de Acuerdo” y “De Acuerdo” pudiera no ser la misma que entre “En desacuerdo” y “Indiferente”.

Tabla 9.84: Relaciones entre la comprensión y los factores actitudinales

Factores	P. Total-Prueba	Ansiedad	Agrado	Utilidad	Motivación	Confianza
P. Total-Prueba	1	0,018	0,027	0,099	0,013	0,170
Ansiedad		1	0,427	0,435	0,381	0,271
Agrado			1	0,488	0,289	0,382
Utilidad				1	0,354	0,470
Motivación					1	0,190
Confianza						1

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 9.84 se presenta el índice de correlación entre la puntuación total de la prueba y los factores asociados a las matemáticas. Podemos observar que, los factores utilidad y confianza correlacionan con la puntuación en la prueba, esto puede interpretarse, como el reconocimiento de los estudiantes hacia las matemáticas para su vida profesional y que sus habilidades matemáticas les otorga un sentimiento de confianza al enfrentarse ante un problema matemático. Por lo tanto, concluimos que existe una relación en sentido directo entre el nivel de comprensión de los objetos matemáticos y las actitudes hacia las matemáticas.

A manera de resumen

La noción de comprensión juega un papel importante en el aprendizaje de los conceptos matemáticos, es decir, para que un estudiante obtenga un alto nivel de comprensión es necesario que pueda activar procesos matemáticos (pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar) en diferentes prácticas operativas y discursiva a las que este se enfrenta. En este sentido, los estudiantes universitarios fueron capaces de realizar las tareas siguientes:

- Los estudiantes saben responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

- Los estudiantes saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional.
- Los estudiantes saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos.
- Los estudiantes pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluidas las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real.
- Los estudiantes saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos.

Sin embargo, durante los procesos de resolución de problemas matemáticos se manifestaron dificultades tales como:

- Utilizar una representación bidimensional dada para contar o calcular elementos de un objeto; esto, en particular, se produce porque los estudiantes no se aproximaron a razonar matemáticamente, es decir, a realizar deducciones e inducciones que ayudan a particularizar, generalizar y argumentar las decisiones, así como los procesos y las técnicas.
- Realizar una reflexión sobre las relaciones entre una fórmula algebraica y los datos subyacentes, así como interpretar y explicar información matemática compleja en el contexto de una situación real desconocida; dichos problemas influyen en la manera en que los estudiantes explican la solución de un problema y también en cómo justifican y demuestran su solución.
- Aplicar cálculos sencillos para resolver problemas en una conversión de registro en un contexto geométrico, aplicar algoritmos rutinarios para resolver problemas geométricos y simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones. Estas dificultades influyen por la forma en que los estudiantes expresan y representan la información matemática y la manera en que interpretan dicha información.
- Reflexionar sobre la relación entre una fórmula algebraica y los datos subyacentes, esto se debe a que los estudiantes no entienden las matemáticas como un conjunto de ideas y formas de actuar que conllevan a obtener modelos e identificar relaciones y estructuras.
- Concebir y elaborar una estrategia que transforman la información dada para llegar a una conclusión. Incluso con el uso de una estrategia para encontrar una solución

exhaustiva o una conclusión generalizadora. Estas dificultades se manifiestan por no cultivar en los estudiantes la habilidad para resolver lo desconocido, con el objetivo que les permita comprender, identificar, plantear y resolver distintas situaciones del mundo real al mundo de las matemáticas utilizando una variedad de métodos.

- Determinar la cantidad desconocida que aparece en el problema realizando operaciones algebraicas y aritméticas, identificar los cálculos simples necesarios para resolver un problema sencillo en un contexto multiplicativo, términos, definiciones, técnicas básicas y aplicar conceptos geométricos básicos, interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor y analizar un modelo matemático dada que implique una fórmula compleja. Estos conflictos se deben a que los estudiantes no pueden descodificar, interpretar, comparar y diseñar una o varias representaciones que reflejen los aspectos clave de una situación compleja.

Por otra parte, el coeficiente de correlación ordinal de Kendall, nos indica, que cuando los estudiantes se presentan a situaciones matemáticas se activan emociones y sentimientos como la utilidad, el agrado, la confianza y la motivación, lo que ayuda que la ansiedad hacia las matemáticas sea menor en los procesos de resolución de problemas matemáticos. En definitiva, las actitudes hacia las matemáticas parecen favorecer la comprensión de los objetos y procesos matemáticos.

CAPÍTULO10:

CONCLUSIONES

“La humanidad tiene un tesoro común de pensamientos, que transmite de una generación a otra, es decir, los sentidos, los significados de las palabras pertenecen a comunidades de hablantes y no a las mentes de los individuos; lo que es exclusivo de los hablantes son sus representaciones subjetivas, de las que las palabras no son signos” (Frege, 1996, p. 3).

10.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta una síntesis de los resultados obtenidos en la investigación llevada a cabo, exponiendo y analizando a su vez las conclusiones que derivan de la misma. Para ello se recuperarán los objetivos y las hipótesis expuestas en el capítulo de metodología de la investigación. En otra sección de este capítulo se expondrán las cuestiones de las investigaciones que han quedado abiertas y que consideramos interesantes de cara a continuar trabajando sobre ellas como futuras líneas de investigación. También se presentarán las aportaciones del trabajo así como las limitaciones del mismo y publicaciones derivadas de la tesis doctoral.

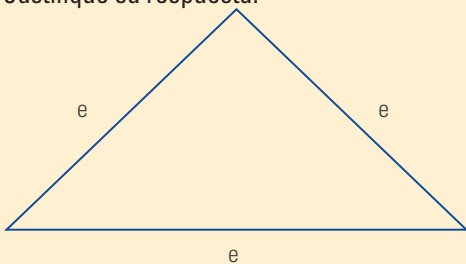
10.2 CONCLUSIONES GENERALES

El objetivo general de este estudio ha sido *“Analizar los procesos de resolución de problemas matemáticos por estudiantes universitarios”*.

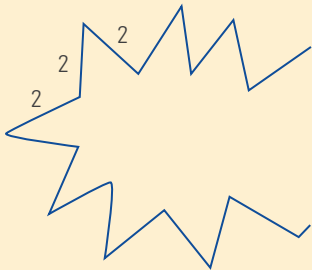
Para alcanzar este objetivo, se parte del **OBJETIVO ESPECÍFICO 1**: *“Determinar los tipos de configuraciones de objetos y procesos que utilizan los estudiantes universitarios en la resolución de problemas”*; hablar de los objetos y procesos que utilizan los estudiantes al realizar una práctica matemática requerida en la resolución de problemas matemáticos, es hablar de las configuraciones cognitivas asociadas a los objetos primarios (lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos, y argumentos) que se ponen en juego en una situación-problema.

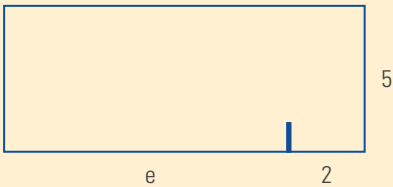
En el capítulo de resultados se han descrito de forma detallada las diferentes configuraciones cognitivas para cada uno de los ítems en los niveles de complejidad de resolución de problemas matemáticos, describiendo los tipos de objetos y procesos puestos en juego en cada uno de ellos. Se han obtenido configuraciones diferentes para los ítems analizados: cuatro para el ítem 1; cuatro para el ítem 2; cuatro para el ítem 3; cuatro para el ítem 8; cuatro para el ítem 10; cuatro para el ítem 14; cuatro para el ítem 17; dos para el ítem 18; cuatro para el ítem 22; tres para el ítem 24; cuatro para el ítem 25; cuatro para el ítem 26; y cuatro para el ítem 28. En la tabla (Tabla 10.1) se muestra una síntesis de dichas configuraciones.

Tabla 10.1: Configuraciones cognitivas asociadas a cada ítem analizado

Ítem		Tipos de Configuraciones Cognitivas		
Ítem 1: Si a 4 le sumo n puede escribirse como n+4. Sume 4 a 3n.		La suma de un número entero con un monomio es igual a un binomio, por lo tanto $(4)+(3n)=4+3n$.		
		La suma de dos números positivos siempre es igual a otro número positivo, entonces $(4)+(3n)=4+3n$.		
		La suma siempre es conmutativa $a+b=b+c$, por lo que si sumo $4+3n=3n+4$.		
		Respuesta correcta sin justificación $4+3n$		
Ítem 2: Si n multiplicado por 4, puede escribirse como 4n. Multiplique por 4 a n+5.		Definición de multiplicación $4n+20$		
		La multiplicación de monomios $(4) \cdot (n+20)=4n+20$		
		La multiplicación de monomios por binomios $(4) \cdot (n+5)=(4 \cdot n)+(4 \cdot 5)=4n+20$		
		Multiplicación de dos polinomios		
Ítem 3: Calcule el perímetro de la siguiente figura. Justifique su respuesta. 		Si $P=na \Rightarrow$ Si $n=3$ y $a=e$ entonces $P=3e$		
		Si $P=3l \Rightarrow$ Si $l=l$, por consiguiente $l=e$ entonces $P=3e$.		
		Si $P=a+b+c$ y $a=e; b=e; c=e$; entonces $P=e+e+e=3e$.		
		Argumento correcto sin justificación $P=3e$.		
Ítem 8: Cuando son verdaderas las siguientes expresiones: $L+M+N=L+P+N$ Escribe una x en la respuesta según tu criterio justifique.		$\forall (L,M,N,P) \in \mathbb{R}$ se cumple que $L+(N+M)=(L+P)+N$ donde $L=0$ entonces $0+(M+N)=(0+P)+N$ entonces $M+N=P+N$ por lo que la ley de cancelación en adición asumen que $M+N=P+N$ es igual a $N+M=N+P$ entonces $M=P$ si y solo si $N \in \mathbb{R}$.		
	Siempre	Nunca	Algunas veces	Cuando...

Ítem	Tipos de Configuraciones Cognitivas
Ítem 10: “Una manzana cuesta C\$ 150 y una pera C\$ 200. Si x es el número de manzana e y el número de pera compradas. ¿Qué representa la expresión $150x+200y$? ¿Por qué?”	La relación de costo de manzanas y peras.
	$150x+200y$ representa la solución matemática encontrada entre la relación de costo de manzanas y peras.
	$150x+200y$ si igualamos a cero $150x+200y=0$ y despejamos y , $y=-4/3 x$, establecemos que el valor de y depende del valor x . Por tanto $150x+200y$ representa la relación de costo de manzanas y peras.
	Representa la relación de costo de manzanas y peras, ya que si igualamos a cero la expresión $150x+200y=0$, obtenemos las expresiones “ $x=-4/3 y$ ” y “ $y=-3/4 x$ ” entonces sustituyendo esos valores para y encontramos que $y=-3/4 (-4/3 x) \Rightarrow y=x$, por lo tanto, se observa la relación de que el valor y depende del valor x .
Ítem 14: ¿Qué puede decirse acerca de r si $r=s+t$ y $r+s+t=30$? (Justifique su respuesta)	Si $r=s+t$ y $r+s+t=30 \Rightarrow t=r-s$: $r+s+(r-s)=30 \Rightarrow 2r=30 \Rightarrow 1/2 (2r)=30(1/2) \therefore r=15$
	Si $r=s+t$ y $r+s+t=30 \Rightarrow r=30-s-t \Rightarrow s+t=30-s-t \Rightarrow s+s+t+t=30 \Rightarrow 2s+2t=30 \Rightarrow 2(s+t)=30 \Rightarrow 1/2 (2(s+t))=30(1/2) \Rightarrow s+t=15$ y como $r=s+t$ entonces $r=15$.
	r representa la relación entre s y t ya que los valores de r dependen de los valores de s y t , por ejemplo si en $r+s+t=30$, r toma los valores de $r=s+t$ se cumple que $s+t+s+t=30 \Rightarrow r=15$ por lo tanto se cumple la relación de dependencia.
	$r=15$ por tanto $r<30$
Ítem 17: ¿Qué se puede decir de m si $m=3n+1$ y $n=4$? (Justifique su respuesta)	Si $n=4$ entonces $m=13$
	m Representa la relación entre $3n+1$ ya que los valores de m depende de los valores de $3n+1$, si $n=4$ entonces $m=13$ por tanto se cumple la relación de dependencia.
	Si $n=4$ entonces $m=3(4)+1 \Rightarrow m=13$.
	Si $m=3n+1$ es una ecuación de la forma $c=ax+b, \forall (a,b) \in \mathbb{R}$ entonces los valores que tomen la variable x tendrá una influencia en los valores de c . Por tales razones si en $m=3n+1$, $n=4$ entonces $m=13$.

Ítem	Tipos de Configuraciones Cognitivas																		
Ítem 18: Parte de esta figura no está dibujada. Hay n lados de longitud. ¿Cuál es el perímetro? (Justifique su respuesta) 	Sin justificación $P=2n$. Sea n el número de lados que tiene la figura geométrica, como cada lado tiene un valor de 2 unidades, entonces podemos afirmar que: para saber el perímetro total de dicha figura es n veces multiplicado por el valor de cada uno de los lado entonces $2(n)=2n$																		
	$n+2<2n$ cuando $n>2$ ya que si $n=3$, entonces $3+2<2(3)\Rightarrow 5<6$ $n+2>2n$ cuando $n<2$ ya que si $n=-1,0,1$ entonces $-1+2>2(-1)\Rightarrow 1>-2$; $0+2>2(0)\Rightarrow 2>0$; $1+2>2(1)\Rightarrow 3>2$ $n+2=2n$ cuando $n=2$ ya que si $2+2=2(2)\Rightarrow 4=4$ por tales razones $n+2>2n$ cuando $n<2$. $n+2<2n$ cuando $n>2$; $n+2>2n$ cuando $n<2$; $n+2=2n$ cuando $n=2$ y se comprueba en la siguiente tabla: <table><tr><th>n</th><th>$n+2$</th><th>$2n$</th></tr><tr><td>-1</td><td>1</td><td>-2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	n	$n+2$	$2n$	-1	1	-2	0	2	0	1	3	2	2	4	4	3	5	6
n	$n+2$	$2n$																	
-1	1	-2																	
0	2	0																	
1	3	2																	
2	4	4																	
3	5	6																	
Ítem 22: ¿Cuál expresión es la mayor, $2n$ o $n+2$? (Justifique su respuesta)																			
	Argumento correcto sin justificación $c<5$ Si $c+d=10\Rightarrow d=10-c\Rightarrow c<d\Rightarrow c<10-c\Rightarrow c+c<10-c+c\Rightarrow 2c<10\Rightarrow (1/2)\cdot 2c<10\cdot (1/2)\Rightarrow c<5$ por tanto podemos decir que c es menor que 5. Si $c+d=10\Rightarrow d=10-c\Rightarrow c<d\Rightarrow c<10-c\Rightarrow c+c<10-c+c\Rightarrow 2c<10\Rightarrow (1/2)\cdot 2c<10\cdot (1/2)\Rightarrow c<5$ y si $c=10-d\Rightarrow 10-d<d\Rightarrow 10-d+d<d+d\Rightarrow 10<2d\Rightarrow (1/2)\cdot 10<2d\cdot (1/2)\Rightarrow 5<d$ entonces podemos decir que $c<5$ y se cumple que $c<d$ ya que si $c<5<d$ entonces $c<5$.																		
Ítem 24: ¿Qué puede decirse acerca de c si $c+d=10$ y c es menor que d? Justifique su respuesta).																			

Ítem	Tipos de Configuraciones Cognitivas
Ítem 25: ¿Cuál es el área A de la siguiente figura? (Justifique su respuesta). 	Considerando que los ángulos en el interior de la figura son ángulos rectos, por tanto su área es igual al producto de su base por altura, es decir: $5e+10$. Si consideramos que es un rectángulo, entonces: $A=ba$ donde $b=e+2$ y $a=5$ por sustitución en $A=ba \Rightarrow A=(e+2) \cdot 5$ Si nombramos a este rectángulo ABCD y decimos que la altura es $\overline{BC}=\overline{AD}=5$ y que la base es $AB=CD=e+2$ entonces concluimos que el área es $A=(\overline{BC}) \cdot (\overline{CD}) \Rightarrow A=(5) \cdot (e+2) \Rightarrow A=5e+10$. Argumento sin justificación $5e+10$
Ítem 26: Si $e+f=8$ entonces cuanto es $e+f+g$? (Justifique su respuesta)	El resultado de sumar dos números reales es otro número real; entonces si $e+f=8$ entonces $e+f+g=8+g$ ya que $e+f+g-g=8 \Rightarrow e+f=8$ Si $(e+f)+g=e+(f+g) \Rightarrow (e+f)+s(g)=e+(f+s(g))$ en concreto $(e+f)+s(g)=s[(e+f)+g]=s[e+(f+g)]=e+s(f+g)=e+[f+s(g)]$ por tales razones de asociación se cumple que si $e+f=8$ entonces $e+f+g=8+g$ ya que $e+f+g-g=8 \Rightarrow e+f=8$ Si $x=g$ y $h=e+f$ entonces $x+h=h+x \Rightarrow x+s(h)=s(h)+x$ en efecto $x+s(h)=x+(h+1)=(x+h)+1=(h+x)+1=h+(x+1)=h+(1+x)=(h+1)+x=s(h)+x$ como $s(h)=e+f=8$ y $x=g \Rightarrow e+f+g=8+g$. Argumento sin justificación $8+g$
Ítem 28: Los lápices azules cuestan a 5 córdobas cada uno y los lápices rojos a 6 córdobas cada uno. Si compro algunos lápices azules y rojos que juntos cuesten 90 córdobas, y llamamos a x al número de lápices azules que compro y el número de lápices rojos que compro. ¿Qué puedes escribir sobre x e y? (Justifique su respuesta)	Sea x=número de lápices azules; y=número de lápices rojos; entonces: si los lápices azules cuestan a 5 córdobas lo representamos por $5x$; y si los lápices rojos cuestan a 6 córdobas lo representamos por $6y$; y si juntos cuestan 90 córdobas; entonces podemos escribir de x y y lo siguiente: $5x+6y=90$. Si x=número de lápices azules; y=número de lápices rojos; se deduce de que x y y son parte de la siguiente ecuación $5x+6y=90$. Por tanto, podemos escribir una relación de correspondencia ya que valores pares como $(6,10),(12,5),(0,15),(18,0)$ representan el conjunto solución de la ecuación. x,y son parte de la ecuación $5x+6y=9$, dicha solución $(6,10),(12,5),(0,15),(18,0)$ y se puede escribir que x es creciente en 6; y decreciente en 5. $5x+6y=90$ Sin justificación.

Fuente: Elaboración propia.

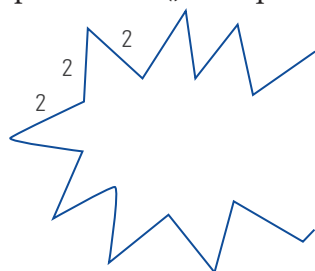
Los resultados anteriores, nos permite comprobar la **HIPÓTESIS 1**: “*Los tipos de objetos y procesos operativizan las nociones cognitivas usadas para la resolución de problemas matemáticos*”: en las configuraciones cognitivas emergen objetos y procesos (representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades, generalización, modelización) a partir de significados personales que los estudiantes utilizaron para la resolución de problemas; estos se relacionan con cuatro categorías: operaciones con números reales y sus propiedades (patrones generalizadores, la letra como objeto); proposiciones y funciones proposicionales (la letra como incógnita específica); propiedades de orden de los números reales (argumentos, parámetros, la letra como número generalizable o como variable); y estructuras, sus tipos y sus propiedades (objetos arbitrarios: uso signo igual). Los objetos y procesos involucran contenidos de transición de la aritmética-álgebra propios de la educación primaria (conocimiento común del contenido) o propios de niveles superiores (conocimiento avanzado, por ejemplo, educación secundaria y educación superior). En consecuencia, el cálculo analítico está ligado a las estructuras, funciones y modelización, y se realiza con el lenguaje simbólico-literal o de otro tipo (Godino et al., 2015). Por ejemplo:

1. Operaciones con números reales y sus propiedades

- Ítem 1: Si a 4 le sumo n puede escribirse como $n+4$. Sume 4 a $3n$. Solución 1. La suma de dos números positivos siempre es igual a otro número positivo, entonces $(4)+(3n)=4+3n$. Solución 2. La suma siempre es conmutativa $a+b=b+c$, por lo que si sumo $4+3n=3n+4$. Objetos y procesos. La noción de suma de dos números, propiedades de los números reales (conmutativa y distributiva), uso del signo “=” como igualdad como resultado aritmético y uso del paréntesis.
- Ítem 17: ¿Qué se puede decir de m si $m=3n+1$ y $n=4$? (Justifique su respuesta). Solución 1. m representa la relación entre $3n+1$ ya que los valores de m depende de los valores de $3n+1$, si $n=4$ entonces $m=13$ por tanto se cumple la relación de dependencia. Solución 2. Si $m=3n+1$ es una ecuación de la forma $c=ax+b, \forall (a,b) \in \mathbb{R}$ entonces los valores que tome la variable x tendrán una influencia en los valores de c. Por tales razones si en $m=3n+1, n=4$ entonces $m=13$. Objetos y procesos. Ecuación de primer grado, propiedades de los números reales, función proposicional, conjunto validez, interpretación de la letra como un número desconocido y pueden realizar operaciones con ella.

2. Proposiciones y funciones proposicionales

- Ítem 18: Parte de esta figura no está dibujada. Hay n lados de longitud. ¿Cuál es el perímetro? (Justifique su respuesta).



Solución. Los estudiantes definieron a n como el número de lados que tiene la figura geométrica; como cada lado tiene un valor de 2 unidades, entonces podemos afirmar que: el perímetro total de dicha figura es n veces multiplicado por el valor de cada uno de los lados, entonces $2(n)=2n$. Objetos y procesos. Establecer una regla general para hallar el número de lados, expresada con lenguaje natural y convertido al lenguaje simbólico, interpretación de la letra como incógnita específica, (n) número de lados necesarios para medir la figura y justificación deductiva de la validez de la expresión.

- Ítem 28: Los lápices azules cuestan a 5 córdobas cada uno y los lápices rojos a 6 córdobas cada uno. Si compro algunos lápices azules y rojos que juntos cuesten 90 córdobas, y llamamos a x al número de lápices azules que compro e y el número de lápices rojos que compro. ¿Qué puedes escribir sobre x e y ? (Justifique su respuesta). Solución 1. Sea x =número de lápices azules; y =número de lápices rojos; entonces: si los lápices azules cuestan a 5 córdobas lo representamos por $5x$; y si los lápices rojos cuestan a 6 córdobas lo representamos por $6y$; y si juntos cuestan 90 córdobas; entonces podemos escribir de x e y lo siguiente: $5x+6y=90$. Solución 2. Si x =número de lápices azules; y =número de lápices rojos; se deduce de que x e y son parte de la siguiente ecuación $5x+6y=90$. Por tanto, podemos escribir una relación de correspondencia ya que valores pares como $(6,10), (12,5), (0,15), (18,0)$ representan el conjunto solución de la ecuación. Objetos y procesos. Uso de operaciones aritméticas aplicadas a números particulares, planteamiento de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas representadas simbólicamente, se establecen relaciones de correspondencia, así como la noción de pares ordenados y, finalmente, se opera con las incógnitas para comprobar el conjunto solución.

3. Propiedades de orden de los números reales

- Ítem 8: Cuándo son verdaderas las siguientes expresiones: $L+M+N=L+P+N$: siempre, nunca, algunas veces, cuando... (Justifique su respuesta). Solución. En este ítem se encontraron respuestas del tipo: $\forall (L,M,N,P) \in \mathbb{R}$ se cumple que $L+(N+M)=(L+P)+N$ donde $L=0$ entonces $0+(M+N)=(0+M)+N$ entonces $M+N=P+N$ por lo que la ley de cancelación en adición asume que $M+N=P+N$ es igual a $N+M=N+P$ entonces $M=P$ si y solo si $N \in \mathbb{R}$. Objetos y procesos. El uso de un lenguaje alfanumérico en el enunciado, el uso de las letras como números generalizables, así como el uso de las propiedades de los números reales.
- Ítem 22: ¿Cuál expresión es la mayor, $2n$ o $n+2$? (Justifique su respuesta). Solución. $n+2 < 2n$ cuando $n > 2$; $n+2 > 2n$ cuando $n < 2$; $n+2 = 2n$ cuando $n = 2$ y se comprueba en la tabla siguiente:

n	n+2	2n
-1	1	-2
0	2	0
1	3	2
2	4	4
3	5	6

Objetos y procesos. En esta solución se propone una tabla para el registro del número de valores que puede tomar de acuerdo a la relación establecida en la situación problema. Interviene la noción de inecuación y relación de números reales; además se reconoce a las letras como una representación de un conjunto de valores no específicos, y realizan una relación sistemática entre dos conjuntos de valores.

4. Estructuras, sus tipos y sus propiedades

- Ítem 26: Si $e+f=8$ entonces cuánto es $e+f+g=$ (Justifique su respuesta). Solución. En este ítem los estudiantes interpretaron el signo “=” como resultado de la operación y no como relación de equivalencia. De hecho, se encontró respuesta del tipo “El resultado de sumar dos números reales es otro número real; entonces si $e+f=8$ entonces $e+f+g=8+g$ para referirse a una secuencia de sumas: $e+f+g-g=8 \Rightarrow e+f=8$ ”. La igualdad en aritmética es interpretada como acción (Wilhelmi, Godino, & Lacasta, 2007). Objetos y procesos. La igualdad como equivalencia de expresiones en contraposición a la igualdad como resultado de una operación aritmética e interpretación de la letra como incógnita específica.
- Ítem 14: ¿Qué puede decirse acerca de r si $r=s+t$ y $r+s+t=30$? (Justifique su respuesta). Solución. Se encontró que los estudiantes aplicaron propiedades de los números reales (elemento neutro, conmutativa, asociativa), así como el significado del signo igual como equivalencia, no como resultado de la operación. Si $r=s+t$ y $r+s+t=30 \Rightarrow r=30-s-t \Rightarrow s+t=30-s-t \Rightarrow s+s+t+t=30 \Rightarrow 2s+2t=30 \Rightarrow 2(s+t)=30 \Rightarrow 1/2(2(s+t))=30(1/2) \Rightarrow s+t=15$ y como $r=s+t$ entonces $r=15$. Objeto y procesos. Uso de la igualdad como equivalencia de expresiones; propiedades de la adición de números reales (elemento neutro, conmutativa, asociativa); y la interpretación de la letra como incógnitas específica.

Por lo tanto, se confirma la hipótesis 1, ya que los tipos de objetos y procesos operativizan las nociones cognitivas usadas para la resolución de problemas matemáticos, es decir, las prácticas requeridas en la solución de una tarea matemática constituida en una configuración cognitiva, activan los significados personales de los estudiantes universitarios (conocimientos, comprensión y competencias sobre los contenidos matemáticos) usados para la resolución de problemas matemáticos.

Relativo a la **HIPÓTESIS 2**: “*Las configuraciones cognitivas de los estudiantes se relacionan con los niveles de resolución de problemas matemáticos*”: atendiendo a la variedad de configuraciones cognitivas es posible determinar los niveles de resolución de problemas matemáticos. Estos niveles están sujetos a ciertas condiciones que dependen directamente de la tarea que se está realizando. En cada nivel puede haber varias configuraciones y en cada configuración procesos matemáticos. En este sentido, encontramos que los estudiantes universitarios son capaces de realizar:

- En el nivel 1, los estudiantes saben responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.
- En el nivel 2, los estudiantes saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional.
- En el nivel 3, los estudiantes saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos.
- En el nivel 4, los estudiantes pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluidas las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real.
- En el nivel 5, los estudiantes saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos.
- En el nivel 6, los estudiantes saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de manera flexible.

Como **OBJETIVO ESPECÍFICO 2**, nos planteamos: “*Detectar las principales dificultades manifestadas por los estudiantes universitarios ante la resolución de problemas matemáticos*”; el análisis de los ítems nos permitió categorizar las respuestas de los estudiantes, y por tanto, también sus errores, dificultades y conflictos. Como se muestra en el capítulo de resultados, dichos conflictos dependen directamente de la tarea, se encuentran en numerosas ocasiones asociados a determinadas configuraciones cognitivas en los errores más frecuentes.

El tipo de categorización utilizada para la clasificación de los errores, situacionales, conceptuales, procedimentales, combinados y sin argumentaciones, nos ha permitido organizarlos globalmente en la tabla 10.2 y poder concluir que el 37% de los errores observados en la prueba se enmarcan dentro de la categoría de errores combinados, seguidos por un 25% en errores procedimentales, un 19% en errores conceptuales, un 17% en errores situacionales y, finalmente, un 2% sin argumentaciones. Si relacionamos los resultados de la tabla 10.2 con el índice de dificultad asociado a cada ítem, aquellos que resultaron “difícil” (ítem 1, ítem 14, ítem 17 y ítem 18), son aquellos en los que más errores procedimentales se comenten; el ítem 1, es en el que aparece el mayor porcentaje de errores procedimentales; en los ítems que resultaron “normales” (ítem 2, ítem 3, ítem 8, ítem 10, ítem 24 y ítem 25) son más frecuente los errores combinados, el ítem 2 es el que reúne el mayor porcentaje de errores combinados; y los ítems que resultaron “fáciles” (ítem 22, ítem 26 y ítem 28) son más recurrentes los errores conceptuales, acá destaca el ítem 26. Atendiendo a la columna de “sin argumentos”, se obtienen tres valores y los más frecuentes están en los ítems 8 y 25.

Tabla 10.2: Distribución global del tipo error

Ítem	Situacionales	Conceptuales	Procedimentales	Combinados	Sin argumentos	Total
Ítem 1	44	53	325	79	0	501
Ítem 2	26	62	26	368	0	482
Ítem 3	79	140	88	166	0	473
Ítem 8	61	131	88	149	44	473
Ítem 10	105	61	88	202	0	456
Ítem 14	79	105	123	236	0	543
Ítem 17	88	114	131	175	0	508
Ítem 18	149	123	105	184	0	561
Ítem 22	44	61	114	96	0	315
Ítem 24	79	96	149	132	0	456
Ítem 25	70	44	105	184	44	447
Ítem 26	61	70	97	114	0	342
Ítem 28	114	53	79	96	35	377
Porcentaje	17	19	25	37	2	100

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 10.3 se describen los errores que tienen un porcentaje significativo en cada uno de los ítems analizados.

Tabla 10.3: Errores más significativos en los ítems analizados

Ítem	Tipo de error	Descripción	Total
Ítem 1	Procedimental	Suma 3+4 posterior 7n	37
Ítem 2	Combinado	Multiplicación 4 por 5 posterior 20+n	42
Ítem 3	Conceptual	Uso incorrecto de la definición de perímetro e^3	16
	Combinado	Si $e=2$ entonces $p=e^3=2^3=8$	19
Ítem 8	Conceptual	Uso incorrecto de la propiedades aditivas	15
	Combinado	$L+M+N$ Siempre es igual a $L+P+N$ cuando M y P tienen el mismo valor.	17
Ítem 10	Situacional	150 manzanas y 200 peras	12
	Combinados	$150 \text{ manzanas} + 200 \text{ peras} = 350 \text{ frutas}$	23
Ítem 14	Conceptual	Uso incorrecto de la definiciones de identidad, equivalencia, relación de dependencia y ecuación.	12
	Procedimental	$s=10; t=10 \Rightarrow r=30-s-t \Rightarrow r=30-10-10 \Rightarrow r=10$	14
	Combinados	$r=10$ por tanto, $r < 30$	27
Ítem 17	Conceptual	Uso incorrecto de la definición sustitución	13
	Procedimental	$m=3(4+1) \Rightarrow m=3(5) \cdot m=15$	15
	Combinados	$m=3(4)+3(1) \Rightarrow m=12+3 \cdot m=15$	20
Ítem 18	Situacional	Valor por la imagen visual que aporta la figura	17
	Conceptual	Uso incorrecto de la definición de perímetro	14
	Combinados	$P=2n+12=14n$	21
Ítem 22	Procedimental	$2n$, cuando $n=1, 2, 3$.	13
	Combinados	Los primeros términos de la serie numérica natural ($n=1,2,3$), sin considerar que en el caso de ($n=1$), $n+2$ es mayor que $2n$ y en el caso de $n=2$ ambas expresiones son iguales.	11
Ítem 24	Conceptual	Valores negativos para c y positivos para d.	11
	Procedimental	Diferentes valores para una misma letra	17
	Combinados	Respuesta con un valor numérico	15
Ítem 25	Procedimental	$e+10; 5e^2$	12
	Combinados	Si $A=ba \Rightarrow 5(e+2)=e+10$	21
Ítem 26	Procedimental	$e+f=8$ asumiendo que $e=4$ y $f=4$	11
	Combinados	Si $a=1$ entonces $e=5, f=6, g=7$ por tanto la solución de $e+f+g=18$, ya que $5+6 \neq 8$	13
Ítem 28	Situacional	x es un lápiz azul y que y es un lápiz rojo	13
	Combinados	$x+y=90$	11

Fuente: Elaboración propia.

Las principales dificultades que se han detectado están directamente asociadas con errores que tienen su origen en un obstáculo cognitivo²⁴ (Collis, 1974; Furinghetti y Paula, 1994; Trigueros y Ursini, 1998; Schoenfeld y Arcavi, 1999; Cajaraville et al. 2012), y errores que tienen su origen en ausencia de sentido (Socas, Camacho, Palarea & Hernández, 1996). En relación a su origen en un obstáculo cognitivo, se encuentran las dificultades que los estudiantes tienen en el álgebra con la naturaleza abstracta de los elementos utilizados. Es decir, los estudiantes que comienza a estudiar álgebra ven las expresiones algebraicas como enunciados que son algunas veces incompletos, en concreto, la interpretación que los estudiantes le atribuyen a las letras. En este sentido, los obstáculos cognitivos que presentan los estudiantes se centran en las dificultades de comprensión y uso de las letras en el contexto algebraico, tipificándose de la manera siguiente:

- **La letra evaluada:** A la letra se le da un valor numérico en lugar de tratarla como un valor desconocido. Por ejemplo, se les preguntó a los estudiantes: ¿Qué se puede decir de m si $m=3n+1$ y $n=4$?; con la idea de que la letra puede ser reemplazada por un número, los estudiantes respondieron de la forma $m=3(4+1) \Rightarrow m=3(5) \therefore m=15$ y $m=3(4)+3(1) \Rightarrow m=12+3 \therefore m=15$, en definitiva, los estudiantes evitan operar con una incógnita específica.
- **La letra no usada:** Aquí la letra se ignora, o a lo más es reconocida (pero sin darle un significado). Por ejemplo, se les preguntó a los estudiantes: Si n multiplicado por 4, puede escribirse como $4n$. Multiplique por 4 a $n+5$; acá los estudiantes justificaron su respuesta con la multiplicación 4 por 5 posterior $20+n$, este tipo de error se relaciona con un obstáculo relacionado con la forma de enseñanza del paréntesis.
- **La letra usada como objeto:** La letra es vista como un nombre para un objeto, o como el objeto propiamente dicho. Por ejemplo, se les planteó a los estudiantes la situación-problema siguiente: “Una manzana cuesta C\$ 150 y una pera C\$ 200. Si x es el número de manzana e y el número de peras compradas. ¿Qué representa la expresión $150x+200y$? ¿Por qué?”, los estudiantes respondieron a esta situación con argumentos incorrectos como 150 manzanas y 200 peras, y $150 \text{ manzanas} + 200 \text{ peras} = 350 \text{ frutas}$; estos resultados indican que el uso de las letras como objeto reduce el significado abstracto de las letras a objetos, pero esta reducción ocurre con frecuencia donde no es adecuado; en síntesis, el problema se manifiesta esencialmente en distinguir entre los objetos mismos y su cantidad.
- **La letra como incógnita específica:** Aquí la letra se piensa como un número particular pero desconocido y el estudiante se lanza a operar con la letra vista de esta manera, a

²⁴ Un obstáculo cognitivo es aquel conocimiento que ha sido, en general, satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esto se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas.

pesar de la falta de cerradura²⁵ del resultado. Por ejemplo, en la situación-problema: Si a 4 le sumo n puede escribirse como $n+4$. Sume 4 a $3n$, los estudiantes dieron la respuesta “Suma $3+4$ posterior $7n$ ” en la que los elementos que tienen significado (los números 3 y 4) son combinados adecuadamente mientras que las letras son ignoradas; en conclusión, los estudiantes consideran a las letras como un número desconocido pero específico, y pueden operar sobre él directamente.

- **La letra como generalizadora de número:** La letra se ve como representante de valores o capaz de tomar varios valores más que como un valor específico. Por ejemplo, se les planteó a los estudiantes la situación-problema siguiente: ¿Qué puede decirse acerca de c si $c+d=10$ y c es menor d?; en este caso los estudiantes responden: valores negativos para c y positivos para d, diferentes valores para una misma letra y respuesta con un valor numérico. Los resultados indican que los estudiantes tienen dificultades en interpretar el carácter dinámico de la variable como representación de diferentes valores e interpretar el carácter abstracto de la variable por cuanto representa situaciones generales.
- **La letra como variable:** La letra como variable representa un rango de valores y el estudiante es capaz de describir el grado con el cual los cambios en un conjunto se determinan por los cambios en otro (lo que significa establecer al menos una relación de segundo orden). Por ejemplo, en la situación-problema “Los lápices azules cuestan a 5 córdobas cada uno y los lápices rojos a 6 córdobas cada uno. Si compro algunos lápices azules y rojos que juntos cuesten 90 córdobas, y llamamos a x al número de lápices azules que compro e y el número de lápices rojos que compro. ¿Qué puedes escribir sobre x e y?”; se encontró que los estudiantes respondían: “x” es un lápiz azul y que “y” es un lápiz rojo; $x+y=90$, a partir de estas respuestas visualizamos que los estudiantes tienen dificultades en distinguir entre una incógnita y un parámetro. Este tipo de conflictos son señalados por Bolea, Bosch y Gascón (2001) ya que una incógnita es una variable que representa una cantidad desconocida, que se opera con ella misma como si fuese conocida; mientras que un parámetro es una variable que representa una cantidad conocida con la que se opera como si fuese desconocida

Con base a estos resultados, se puede concluir que los obstáculos cognitivos de los estudiantes universitarios indican que la interpretación de las letras les causa problemas y su simbolización aún más. En definitiva, las dificultades que presentan los estudiantes universitarios en la comprensión y uso de las letras son conceptuales y se originan en la forma de enseñanza y aprendizaje del álgebra en la Educación Primaria y Educación

²⁵ Propiedad de cerradura en la adición: cuando se suman números reales el resultado es siempre un número real. Por ejemplo, $a+b=c$.

Secundaria. Como consecuencia, no han desarrollado el pensamiento algebraico que les permite comprender el concepto de variable, sus aspectos y usos.

Referente a los errores que tienen su origen en la ausencia del sentido, suelen originarse en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación (semiótico, estructural y autónomo) y se diferencian en las etapas siguientes:

a) Dificultades que tienen su origen en la aritmética

Las dificultades que tienen origen en la aritmética son relativas al uso del paréntesis: no usar paréntesis donde es necesario, o usarlo mal. La confusión y dificultades con el signo "=", porque en aritmética el signo "=" se usa para conectar un problema con su resultado numérico y, con menor frecuencia, para relacionar dos procesos que dan el mismo resultado. Otro aspecto relevante a destacar es la interpretación del símbolo de la operación. En aritmética el símbolo "+" se interpreta como una acción a realizar, es decir, "+" significa realizar la operación (Socas, Camacho, Palarea & Hernández, 1996). En cambio, en álgebra el signo "+" en expresiones como $5+d$ indica el proceso de sumar $5+d$ el símbolo "+" expresa la relación entre dos conjuntos de valores, el que está representado por d y el que está representado por $5+d$. Con esto no se expresa un único resultado sino todos los resultados. En este caso sí tiene sentido dejar la operación indicada.

También existen dificultades con respecto a las propiedades de las operaciones básicas (conmutativa, asociativa, elemento neutro, distributiva, etc.); estas dificultades pueden estar motivadas por la forma de enseñanza y aprendizaje, ya que tradicionalmente se enseñan todas las propiedades al mismo tiempo, sin hacer hincapié en cada una de ellas por separado y no se profundiza en la necesidad de la existencia de dos leyes de composición interna para que se puede dar la propiedad distributiva, lo que puede llevar a combinarlas.

b) Errores procedimentales

Son consecuencia del uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos; estos errores se pueden agrupar en:

- **Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva.** Por ejemplo, en la situación-problema: "Si n multiplicado por 4, puede escribirse como $4n$. Multiplique por 4 a $n+5$ ", los estudiantes respondieron: "es la Multiplicación 4 por 5 posterior $20+n$ ". El error procede de que los estudiantes tratan de distribuir la multiplicación respecto a una de los factores, en este caso el numérico. Posiblemente esta tipo de error se produce por

ignorar la variable “n” como uno de los sumandos para aplicar la propiedad distributiva, lo que implicaría un pensamiento numérico, se trataría de un error operacional.

- **Errores relativos al uso de recíprocos.** Por ejemplo, en la situación-problema “¿Qué puede decirse acerca de r si $r=s+t$ y $r+s+t=30$?”, los estudiantes respondieron: “ $r=30-s-t$ ”, “ $s=10; t=10 \Rightarrow r=30-s-t \Rightarrow r=30-10-10 \Rightarrow r=10$ ”, y “ $r=10$ por tanto, $r<30$ ”. Los errores provienen de que los estudiantes consideran que el signo “=” es sólo aceptable en una expresión cuando le precede uno o más signos operativos (+, -, •, ÷). En efecto, los estudiantes no usan el signo igual como símbolo que separa una de cada o secuencia de operaciones y su resultado, pudiéndose disponer ambos tanto a izquierda como a derecha del signo igual, por ejemplo: $24=12+12$. En este caso, a diferencia del significado operador, se reconoce la propiedad simétrica de la igualdad.
- **Errores de cancelación.** Por ejemplo, en la situación-problema: “Si n multiplicado por 4, puede escribirse como 4n. Multiplique por 4 a $n+5$ ”, los estudiantes respondieron: “es la Multiplicación de $4 \cdot 5=20$ ó la Multiplicación 4 por 5 posterior $20+n$ ”. En esta situación-problema, los estudiantes visualizan las expresiones algebraicas como enunciados incompletos y esto se enlaza con una falta de sentido de las operaciones con monomios; esto se debe a que los estudiantes no encuentran sentido al uso del lenguaje algebraico en determinados contextos, no saben trabajar con las variables, ya que estas no tienen significado para ellos, por lo que sólo trabajan con el lenguaje numérico.

c) Dificultades debidas a la naturaleza del lenguaje algebraico dentro del contexto de las matemáticas

Los estudiantes encuentran dificultades cuando intentan realizar una lectura analítica de los enunciados verbales y serios obstáculos en el proceso de traducción de los lenguajes natural aritmético y geométrico al lenguaje algebraico. Que en el contexto de las poblaciones diversas de Nicaragua, la lengua materna de la mayoría de estudiantes en aulas de clases con diversidad étnica no es el español; por ejemplo, enseñar en Miskito los contenidos matemáticos es difícil, especialmente el vocabulario técnico matemático, puesto que no hay expresiones equivalentes que se conozcan en la lengua materna (Castrillo & Torres, 2010). No cuesta imaginar que enseñar los números naturales del 1 al 100 es una odisea para la mayoría de los profesores, dado que no conocen todos los números en la lengua materna de sus estudiantes en nivel primaria donde se imparten contenidos aritméticos. Otro aspecto relevante, en el proceso de formación de poblaciones en contexto de diversidad, es la dificultad que se vive en el aula debido al repertorio bilingüe español-miskitu; miskitu-español; o trilingüe: español-creol-miskitu; creol-miskitu-español, enfocado particularmente en la práctica docente.

En síntesis, las dificultades debidas a la naturaleza del lenguaje algebraico dentro del contexto de las matemáticas, surgen porque los estudiantes no son capaces de realizar tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis (Duval, 1993):

- Identificar la presencia de un registro de representación.
- Elaborar el tratamiento de una representación, que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formado.
- Formular la conversión de una representación, que es la transformación de la representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

d) Dificultades en el proceso de generalización

Los estudiantes presentan dificultades en el proceso de generalización. Estas dificultades se asocian a problemas de transición del lenguaje natural al lenguaje algebraico, lo que causa que los estudiantes no realicen una transformación adecuada, ya que no le encuentran sentido al uso del lenguaje algebraico en determinados contextos, no saben trabajar con las letras porque éstas no tienen significados para ellos, por lo que necesitan retroceder al uso del lenguaje numérico, particularizando las expresiones. En concreto, este problema se da porque los estudiantes no pueden identificar, formular y emplear operaciones formales, es decir, no son capaces de percibir lo general en lo particular.

El análisis de las configuraciones cognitivas y de las principales dificultades en los procesos de resolución de un problema matemático nos permite referirnos a la **HIPÓTESIS 3**: *“La recurrencia a configuraciones cognitivas de alto nivel es más frecuente que la recurrencia a configuraciones cognitivas de bajo nivel en la resolución de un mismo problema matemático”*; con el propósito de explicar los resultados alrededor de esta hipótesis, partimos que, para las configuraciones de alto nivel se agruparán en las puntuaciones media de argumentos correctos y las configuraciones de bajo nivel se concentrarán en las puntuaciones media de argumentos incorrectos en los 32 ítems del cuestionario cognitivo. Desde esta perspectiva, queremos comprobar si existen diferencias significativas entre ambas puntuaciones. Para ello, realizamos una prueba T de muestras relacionadas. Dado que la distribución T es simétrica, al igual que la distribución normal, pero más aplanada, es decir su coeficiente de Curtosis o apuntamiento es negativo y que cuando el tamaño de la muestra excede de 30 casos, la T se aproxima a la distribución normal, efectuamos primeramente una prueba de Kolmogorov-Smirnov para ver en qué medida se aproxima a la distribución normal; los resultados de esta prueba se muestran en la tabla 10.4.

Tabla 10.4: Prueba de normalidad Kolmogorov-Smirnov en las configuraciones cognitivas

N		Configuración Cogni- tiva de Alto Nivel	Configuración Cogni- tiva de Bajo Nivel
		32	32
Parámetros males	Media	60,187	39,812
	Desviación estándar	12,731	12,731
Máximas diferen- cias extremas	Absoluta	0,123	0,123
	Positivo	0,123	0,089
	Negativo	-0,089	-0,123
Estadístico de prueba		0,123	0,123
Sig. asintótica (bilateral)		0,200	0,000

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla anterior, podemos ver como las configuraciones de alto nivel y las configuraciones de bajo nivel se distribuyen como una normal, dado que la significancia del estadístico de Kolmogorov-Smirnov es mayor de 0,05. En consecuencia, podemos aplicar pruebas paramétricas. Para ello, se determinó la prueba T para dos muestras relacionadas, por consiguiente, la tabla 10.5 recoge, para cada variable (Configuración cognitiva del alto nivel, Configuración cognitiva de bajo nivel), la media, el número de casos, las desviación estándar y el error típico de la media.

Tabla 10.5: Estadísticos de las muestras relacionadas en las configuraciones cognitivas

Par 1	N	$\bar{x}$	σ	$\bar{x}_E$
Configuración Cognitiva de Alto Nivel	32	60,187	12,731	2,250
Configuración Cognitivo de Bajo Nivel	32	39,812	12,731	2,250

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 10.6 se incluye, en la primera mitad, tres estadísticos a las diferencias entre cada par de puntuaciones: la media, la desviación estándar y el error típico de la media. La siguiente columna contiene el intervalo de confianza para la diferencia entre las medias con un 95% de confianza. La segunda mitad de la tabla informa el valor estadístico t, sus grados de libertad (gl) y el nivel crítico bilateral (Sig. bilateral). Puesto que el valor crítico de significancia es muy pequeño (Sig.=0,000) y es menor que 0,05, por lo que, rechazamos

la igualdad entre las puntuaciones y admitimos que existen diferencias estadísticamente significativa a favor de las configuraciones cognitivas de alto nivel. Esto se debe porque las configuraciones cognitivas de alto nivel alcanzaron el 60,187% de las puntuaciones en el cuestionario mientras que las configuraciones cognitivas de bajo nivel alcanzaron el 39,812% de las puntuaciones en el cuestionario, lo cual plantea diferencias significativas.

Tabla 10.6: Prueba de muestras relacionadas en las configuraciones cognitivas

Par 1		Diferencias emparejadas							
		$\bar{x}$	σ	$\bar{x}_E$	95% de intervalo de confianza de la diferencia		t	gl.	Sig.
					Inferior	Superior			
Configuración Cognitiva de Alto Nivel	Configuración Cognitiva de Bajo Nivel	20,375	25,463	4,501	11,194	29,555	4,526	31	0,000

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados anteriores los corroboramos en la siguiente comparación de medias de las configuraciones cognitivas de alto nivel y las configuraciones cognitivas de bajo nivel a través del procedimiento del cálculo del tamaño del efecto de Cohen (1988), que en definitiva nos ayuda a describir las diferencias de las puntuaciones totales en la aplicación del instrumento y consiguientemente de la relevancia encontrada. Véase los resultados en la tabla 10.7.

Tabla 10.7: Diferencias entre configuraciones cognitivas de alto nivel y bajo nivel

Test	$\bar{x}$	σ	d Cohen's	Tamaño del efecto en r
Configuración Cognitiva de Alto Nivel	60,187	12,731	1,600	0,625
Configuración Cognitiva de Bajo Nivel	39,812	12,731		

Fuente: Elaboración propia.

La *d-cohen* de 1,600 indica que la diferencia entre las configuraciones de alto nivel y las configuraciones de bajo nivel es perfecta y su correlación de 0,625 confirmando que existen diferencias significativas a favor de las configuraciones de alto nivel. Estos resultados los comprobamos en los 32 problemas matemáticos, donde encontramos más recurrencia hacia configuraciones cognitivas de alto nivel en un mismo problema matemático con un efecto medio-alto, véase tabla 10.8.

Tabla 10.8: Diferencias en las configuraciones cognitivas

	Configuración Cognitiva de Alto Nivel	Configuración Cognitiva de Bajo Nivel	σ	d-Cohen	Tamaño del efecto en r
1	0,43	0,57	0,50	-0,28	-0,14
2	0,45	0,55	0,50	-0,19	-0,09
3	0,46	0,54	0,50	-0,17	-0,08
4	0,68	0,32	0,46	0,80	0,37
5	0,67	0,33	0,47	0,73	0,34
6	0,73	0,27	0,44	1,06	0,47
7	0,59	0,41	0,49	0,37	0,18
8	0,46	0,54	0,50	-0,15	-0,08
9	0,72	0,28	0,45	0,99	0,45
10	0,48	0,52	0,50	-0,09	-0,05
11	0,70	0,30	0,46	0,88	0,40
12	0,69	0,31	0,46	0,83	0,38
13	0,63	0,37	0,48	0,53	0,26
14	0,38	0,62	0,49	-0,50	-0,24
15	0,81	0,19	0,39	1,60	0,62
16	0,81	0,19	0,39	1,60	0,62
17	0,42	0,58	0,49	-0,34	-0,17
18	0,36	0,64	0,48	-0,59	-0,28
19	0,70	0,30	0,46	0,87	0,40
20	0,65	0,35	0,48	0,62	0,30
21	0,58	0,42	0,49	0,34	0,17
22	0,64	0,36	0,48	0,57	0,27
23	0,73	0,27	0,44	1,04	0,46
24	0,48	0,52	0,50	-0,07	-0,03
25	0,49	0,51	0,50	-0,05	-0,03
26	0,61	0,39	0,49	0,44	0,22
27	0,78	0,22	0,41	1,39	0,57
28	0,57	0,43	0,50	0,27	0,14
29	0,59	0,41	0,49	0,39	0,19
30	0,73	0,27	0,44	1,04	0,46
31	0,61	0,39	0,49	0,46	0,22
32	0,63	0,37	0,48	0,54	0,26

Fuente: Elaboración Propia.

Todo lo anterior nos permite concluir, que la recurrencia a configuraciones de alto nivel es más frecuente que la recurrencia a configuraciones de bajo nivel en la resolución de un mismo problema matemático.

Por otra parte, teniendo en cuenta que las actitudes hacia las matemáticas configuran una parte de las bases que sustentan las decisiones que los estudiantes toman en el momento de la resolución de un problema matemático, nos formulamos el **OBJETIVO ESPECÍFICO 3**: “Identificar las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes universitarios”; en este sentido, pensamos que este objetivo se ha cumplido suficientemente, en cuanto hemos realizado un estudio de evaluación sobre una muestra de 876 estudiantes universitarios. Para ello, se utilizó la escala de actitudes hacia las matemáticas de Auzmendi (1992), puesto que este instrumento tiene una amplia validez, fiabilidad y está adaptado al contexto de la muestra (Flores & Auzmendi, 2015). Encontramos que la puntuación sobre las actitudes de los estudiantes universitarios es un indicador de sus actitudes hacia los procesos de resolución de problemas, en lo que respecta a los factores evaluados en esta escala.

Los datos obtenidos fueron analizados, presentados sistemáticamente y discutidos en relación con este objetivo y los resultados de otros trabajos previos. Los resultados muestran que la actitud hacia las matemáticas de los estudiantes universitarios es positiva globalmente, y en sus distintos factores presentaron las características siguientes:

- El valor subjetivo atribuido a los procesos de resolución de problemas matemáticos es importante.
- Los estudiantes activan emociones y sentimientos de aceptación o rechazo ante la presencia de resolución de problemas matemáticos.
- Los estudiantes se sienten motivados en el sentido de la importancia que le conceden a las matemáticas en sus propias vidas según progresan a los estudios superiores.
- La confianza percibida por los estudiantes universitarios se relaciona positivamente con la capacidad para resolver tareas matemáticas.
- Puesto que se ha observado una relación entre el agrado y los procesos de resolución de problemas matemáticos, los estudiantes que manifiestan agrado por las matemáticas ven los problemas como retos a su ingenio y a su esfuerzo, por lo que se sienten cómodos al tratar de resolver los problemas matemáticos.
- Al crecer el agrado crece la utilidad y al crecer la utilidad crece la confianza, que están relacionados de forma directamente proporcional, lo cual es positivo al tratar de resolver un problema matemático.
- La ansiedad disminuye con el agrado, lo cual dice algo positivo sobre los estudiantes, y es que ven con agrado problemas matemáticos que le producen ansiedad al momento resolverlo, quizá porque las consideran un desafío intelectual.
- La ansiedad disminuye con la utilidad, lo cual representa algo positivo sobre los estudiantes, y es que reconocen la utilidad de las matemáticas que les producen ansiedad hacia los procesos de resolución de problemas matemáticos.

- La ansiedad disminuye con la motivación, los estudiantes se sienten motivados en prácticas sobre resolución de problemas matemáticos que les produce ansiedad.
- La ansiedad disminuye con la confianza, esto indica que los estudiantes se sienten con confianza al resolver una situación-problema que les provoca ansiedad.

De esta manera, los resultados obtenidos por Hidalgo, Maroto y Palacios (2005), Fernández y Aguirre (2010) y Cardoso, Vanegas y Cerecedo (2012) coinciden con los de este estudio, en el sentido de que los estudiantes perciben las Matemáticas como una disciplina útil, pero al momento que se involucran el empleo de los procedimientos matemáticos se manifiesta una actitud de desconfianza y de ansiedad. Por tales razones, se puede considerar a las actitudes hacia las matemáticas como motor del aprendizaje. Estas pueden influir en la decisión sobre futuras oportunidades de aprendizaje o de carrera profesional.

Referente al **OBJETIVO ESPECÍFICO 4**, tratamos de : *“Estudiar si existen diferencias significativas entre especialidad, género y etnia en relación con los niveles de resolución de problemas matemáticos y las actitudes hacia las matemáticas”*. En este sentido, se muestran los resultados de análisis de varianza en los niveles de resolución de problemas matemáticos relativo a las variables especialidad, género y etnia:

- En el nivel 1, los estudiantes de la especialidad en Contabilidad Pública y Auditoria son los que resuelven la mayoría de las tareas o problemas propuestos; sin embargo, los estudiantes de las otras especialidades son capaces de resolver el 56% de las actividades, exceptuando los de la especialidad en Comunicación Intercultural que presentaron deficiencias en la resolución de problemas matemáticos. En relación al grupo étnico, la etnia Mestizo resolvió la mayoría de las tareas, seguida de las etnias Creole y Miskito, y con una menor efectividad de resolución por parte de la etnia Mayangna. Un aspecto relevante fue que tanto hombres y mujeres, en este nivel, tienen la misma capacidad de resolución de problemas.
- En el nivel 2, los estudiantes de la especialidad en Contabilidad Pública y Auditoria son los que resuelven la mayor parte de los problemas; no obstante, las otras especialidades son capaces de resolver el 63% de las situaciones-problemas de este nivel, omitiendo las especialidades en Comunicación Intercultural y Desarrollo Local que muestran más dificultades. Referente a las etnias podemos afirmar que en este nivel tanto la etnia Creole, Miskito, Mayangna y Mestizo poseen la misma capacidad para resolver una tarea de este nivel. Igualmente, se encuentra que hombres y mujeres tienen capacidades similares para resolver problemas de este nivel.

- En el nivel 3, los estudiantes de la especialidad Contabilidad Pública y Auditoria tienen los conocimientos matemáticos para resolver las tareas con que se enfrentan, aunque los estudiantes de las otras especialidades solucionaron el 59% de las tareas orientadas en este nivel, salvando a los estudiantes de las especialidades en Comunicación Intercultural y Desarrollo Local que mantienen las mismas dificultades. Concluimos que tanto hombres y mujeres provenientes de las etnias Creole, Miskito, Mayangna y Mestizo tienen la misma competencia de resolución de problemas en este nivel.
- En el nivel 4, destacan los estudiantes de la especialidad en Sociología con Mención en Autonomía, pero los estudiantes de las otras especialidades consiguieron resolver el 62% de las tareas matemáticas propuestas, exceptuando los estudiantes de las especialidades en Comunicación Intercultural y Desarrollo Local que muestran dificultades en la resolución de los problemas. Finalmente, afirmamos que tanto hombres y mujeres provenientes de las etnias Creole, Miskito, Mayangna y Mestizo tienen la misma capacidad de resolución de problemas en este nivel.
- En el nivel 5, sobresalen los estudiantes de la especialidad en Informática Administrativa; no obstante, los estudiantes de las demás especialidades fueron capaces de solucionar el 63% de los problemas, excluyendo los estudiantes de las especialidades en Comunicación Intercultural y Desarrollo Local que no resolvieron todas las tareas programadas para este nivel. Concluimos que tanto hombres y mujeres proveniente de las etnias Creole, Miskito, Mayangna y Mestizo tienen la misma competencia de resolución de problemas en este nivel.
- En el nivel 6, resaltan los estudiantes de la especialidad en Sociología con Mención en Autonomía; pero los estudiantes de las otras especialidades son capaces de resolver el 63% de los problemas matemáticos propuestos, omitiendo a los estudiantes de las especialidades en Comunicación Intercultural y Desarrollo Local que presentan dificultades en este nivel. Recalcamos que tanto hombres y mujeres proveniente de las etnias Creole, Miskito, Mayangna y Mestizo tienen la misma competencia de resolución de problemas en este nivel.

Con el propósito de corroborar los resultados anteriores, se efectuó un análisis de varianza multifactorial de efectos fijos en la puntuación total de la prueba. El análisis de varianza muestra la existencia de diferencias estadísticamente significativas en las especialidades y etnias. Puesto que los valores-P de las variables especialidad y etnia son menores que 0,05, estas variables tienen un efecto estadísticamente significativo sobre puntuación total de la prueba con un 95% de nivel de confianza. Por tanto, se rechaza la hipótesis de igualdad de varianza y aceptamos las diferencias significativas de las especialidades y las etnias (véase tabla 10.9).

Tabla 10.9: Análisis de varianza en la puntuación total de la prueba

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Especialidad	10629.8	10	1062,98	33,88	0,0000
Etnia	342.082	3	114,027	3,63	0,0126
Género	3,99448	1	3,99448	0,13	0,7212
Residuos	27013,2	861	31,3742		
Total (Corregido)	38736,0	875			

Fuente: Elaboración propia.

Para determinar entre qué grupos se produjeron estas diferencias significativas se realizó la prueba HSD de Tukey. Los resultados muestran que los estudiantes de ingeniería agroforestal, ingeniería zootecnia, comunicación intercultural y desarrollo local obtuvieron puntuaciones significativamente más bajas que las restantes especialidades, lo que confirma que estos grupos tienen mayor dificultad al tratar de resolver los problemas matemáticos.

Tabla 10.10: Resultados de la prueba HSD de Tukey en las especialidades

(I) Especialidad	(J) Especialidad	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
					Límite inferior	Límite superior
Administración de Empresas	Contabilidad	-0,87491	0,94242	0,998	-3,9164	2,1666
	Ing. Civil	1,71507	0,81877	0,581	-,9274	4,3575
	Ing. Agroforestal	4,59292*	0,74820	0,000	2,1782	7,0076
	Medicina	1,66410	0,85542	0,687	-1,0967	4,4248
	Psicología	2,03855	0,76422	0,217	-,4279	4,5050
	Sociología	0,81674	0,79705	0,995	-1,7556	3,3891
	Ing. Zootecnia	5,78914*	0,81877	0,000	3,1467	8,4316
	Comunicación Intercultural	12,97124*	1,03472	0,000	9,6319	16,3106
	Desarrollo Local	12,34624*	1,03472	0,000	9,0069	15,6856
	Informática Administrativa	0,88791	0,78740	0,989	-1,6533	3,4291

(I) Especialidad	(J) Especialidad	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
					Límite inferior	Límite superior
Contabilidad Pública y Auditoría	Administración de Empresas	0,87491	0,94242	0,998	-2,1666	3,9164
	Ing. Civil	2,58998	0,99937	0,255	-,6353	5,8153
	Ing. Agroforestal	5,46784*	0,94242	0,000	2,4263	8,5094
	Medicina	2,53901	1,02961	0,326	-,7839	5,8619
	Psicología	2,91346	0,95519	0,084	-,1693	5,9962
	Sociología	1,69166	0,98165	0,823	-1,4765	4,8598
	Ing. Zootecnia	6,66406*	0,99937	0,000	3,4387	9,8894
	Comunicación Intercultural	13,84615*	1,18279	0,000	10,0289	17,6634
	Desarrollo Local	13,22115*	1,18279	0,000	9,4039	17,0384
	Informática Administrativa	1,76282	0,97383	0,774	-1,3801	4,9057
Ing. Civil	Administración de Empresas	-1,71507	0,81877	0,581	-4,3575	,9274
	Contabilidad	-2,58998	0,99937	0,255	-5,8153	,6353
	Ing. Agroforestal	2,87785*	0,81877	0,020	,2354	5,5203
	Medicina	-0,05097	0,91779	1,000	-3,0130	2,9110
	Psicología	0,32348	0,83343	1,000	-2,3663	3,0133
	Sociología	-0,89832	0,86364	0,994	-3,6856	1,8889
	Ing. Zootecnia	4,07407*	0,88372	0,000	1,2220	6,9262
	Comunicación Intercultural	11,25617*	1,08684	0,000	7,7486	14,7638
	Desarrollo Local	10,63117*	1,08684	0,000	7,1236	14,1388
	Informática Administrativa	-0,82716	0,85474	0,997	-3,5857	1,9314

(I) Especialidad	(J) Especialidad	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
					Límite inferior	Límite superior
Ing. forestal	Administración de Empresas	-4,59292*	0,74820	0,000	-7,0076	-2,1782
	Contabilidad	-5,46784*	0,94242	0,000	-8,5094	-2,4263
	Ing. Civil	-2,87785*	0,81877	0,020	-5,5203	-,2354
	Medicina	-2,92882*	0,85542	0,027	-5,6896	-,1681
	Psicología	-2,55437*	0,76422	0,035	-5,0208	-,0880
	Sociología	-3,77618*	0,79705	0,000	-6,3485	-1,2038
	Ing. Zootecnia	1,19622	0,81877	0,932	-1,4462	3,8387
	Comunicación Intercultural	8,37832*	1,03472	0,000	5,0389	11,7177
	Desarrollo Local	7,75332*	1,03472	0,000	4,4139	11,0927
	Informática Administrativa	-3,70501*	0,78740	0,000	-6,2462	-1,1638
Medicina	Administración de Empresas	-1,66410	0,85542	0,687	-4,4248	1,0967
	Contabilidad Pública	-2,53901	1,02961	0,326	-5,8619	,7839
	Ing. Civil	0,05097	0,91779	1,000	-2,9110	3,0130
	Ing. Agroforestal	2,92882*	0,85542	0,027	,1681	5,6896
	Psicología	0,37445	0,86947	1,000	-2,4316	3,1805
	Sociología	-0,84735	0,89846	0,997	-3,7470	2,0523
	Ing. Zootecnia	4,12504*	0,91779	0,000	1,1630	7,0871
	Comunicación Intercultural	11,30714*	1,11471	0,000	7,7096	14,9047
	Desarrollo Local	10,68214*	1,11471	0,000	7,0846	14,2797
	Informática Administrativa	-0,77619	0,88991	0,999	-3,6483	2,0959
Psicología	Administración de Empresas	-2,03855	0,76422	0,217	-4,5050	,4279
	Contabilidad	-2,91346	0,95519	0,084	-5,9962	,1693
	Ing. Civil	-0,32348	0,83343	1,000	-3,0133	2,3663
	Ing. Agroforestal	2,55437*	0,76422	0,035	,0880	5,0208
	Medicina	-0,37445	0,86947	1,000	-3,1805	2,4316
	Sociología	-1,22180	0,81210	0,918	-3,8427	1,3991
	Ing. Zootecnia	3,75059*	0,83343	0,000	1,0608	6,4404
	Comunicación Intercultural	10,93269*	1,04635	0,000	7,5557	14,3096
	Desarrollo Local	10,30769*	1,04635	0,000	6,9307	13,6846
	Informática Administrativa	-1,15064	0,80264	0,940	-3,7410	1,4397

(I) Especialidad	(J) Especialidad	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
					Límite inferior	Límite superior
Sociología	Administración de Empresas	-0,81674	0,79705	0,995	-3,3891	1,7556
	Contabilidad	-1,69166	0,98165	0,823	-4,8598	1,4765
	Ing. Civil	0,89832	0,86364	0,994	-1,8889	3,6856
	Ing. Agroforestal	3,77618*	0,79705	0,000	1,2038	6,3485
	Medicina	0,84735	0,89846	0,997	-2,0523	3,7470
	Psicología	1,22180	0,81210	0,918	-1,3991	3,8427
	Ing. Zootecnia	4,97240*	0,86364	0,000	2,1851	7,7597
	Comunicación Intercultural	12,15449*	1,07057	0,000	8,6994	15,6096
	Desarrollo Local	11,52949*	1,07057	0,000	8,0744	14,9846
	Informática Administrativa	0,07116	0,83396	1,000	-2,6203	2,7626
Ing. Zootecnia	Administración de Empresas	-5,78914*	0,81877	0,000	-8,4316	-3,1467
	Contabilidad	-6,66406*	0,99937	0,000	-9,8894	-3,4387
	Ing. Civil	-4,07407*	0,88372	0,000	-6,9262	-1,2220
	Ing. Agroforestal	-1,19622	0,81877	0,932	-3,8387	1,4462
	Medicina	-4,12504*	0,91779	0,000	-7,0871	-1,1630
	Psicología	-3,75059*	0,83343	0,000	-6,4404	-1,0608
	Sociología	-4,97240*	0,86364	0,000	-7,7597	-2,1851
	Comunicación Intercultural	7,18210*	1,08684	0,000	3,6745	10,6897
	Desarrollo Local	6,55710*	1,08684	0,000	3,0495	10,0647
	Informática Administrativa	-4,90123*	0,85474	0,000	-7,6598	-2,1427
Comunicación Intercultural	Administración de Empresas	-12,97124*	1,03472	0,000	-16,3106	-9,6319
	Contabilidad	-13,84615*	1,18279	0,000	-17,6634	-10,0289
	Ing. Civil	-11,25617*	1,08684	0,000	-14,7638	-7,7486
	Ing. Agroforestal	-8,37832*	1,03472	0,000	-11,7177	-5,0389
	Medicina	-11,30714*	1,11471	0,000	-14,9047	-7,7096
	Psicología	-10,93269*	1,04635	0,000	-14,3096	-7,5557
	Sociología	-12,15449*	1,07057	0,000	-15,6096	-8,6994
	Ing. Zootecnia	-7,18210*	1,08684	0,000	-10,6897	-3,6745
	Desarrollo Local	-0,62500	1,25756	1,000	-4,6836	3,4336
	Informática Administrativa	-12,08333*	1,06340	0,000	-15,5153	-8,6514

(I) Especialidad	(J) Especialidad	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
					Límite inferior	Límite superior
Desarrollo Local	Administración de Empresas	-12,34624*	1,03472	0,000	-15,6856	-9,0069
	Contabilidad	-13,22115*	1,18279	0,000	-17,0384	-9,4039
	Ing. Civil	-10,63117*	1,08684	0,000	-14,1388	-7,1236
	Ing. Agroforestal	-7,75332*	1,03472	0,000	-11,0927	-4,4139
	Medicina	-10,68214*	1,11471	0,000	-14,2797	-7,0846
	Psicología	-10,30769*	1,04635	0,000	-13,6846	-6,9307
	Sociología	-11,52949*	1,07057	0,000	-14,9846	-8,0744
	Ing. Zootecnia	-6,55710*	1,08684	0,000	-10,0647	-3,0495
	Comunicación Intercultural	0,62500	1,25756	1,000	-3,4336	4,6836
	Informática Administrativa	-11,45833*	1,06340	0,000	-14,8903	-8,0264
Informática Administrativa	Administración de Empresas	-0,88791	0,78740	0,989	-3,4291	1,6533
	Contabilidad	-1,76282	0,97383	0,774	-4,9057	1,3801
	Ing. Civil	0,82716	0,85474	0,997	-1,9314	3,5857
	Ing. Agroforestal	3,70501*	0,78740	0,000	1,1638	6,2462
	Medicina	0,77619	0,88991	0,999	-2,0959	3,6483
	Psicología	1,15064	0,80264	0,940	-1,4397	3,7410
	Sociología	-0,07116	0,83396	1,000	-2,7626	2,6203
	Ing. Zootecnia	4,90123*	0,85474	0,000	2,1427	7,6598
	Comunicación Intercultural	12,08333*	1,06340	0,000	8,6514	15,5153
	Desarrollo Local	11,45833*	1,06340	0,000	8,0264	14,8903

Fuente: Elaboración propia.

Además, el análisis de la prueba HSD de Tukey mostró que, la etnia Mayangna obtuvieron puntuaciones significativamente más baja que los restante tres grupos étnicos, lo que confirma sus dificultades en la resolución de problemas matemáticos (véase tabla 10.11).

Tabla 10.11: Resultados de la prueba de HSD de Tukey en las etnias

(I) Etnia	(J) Etnia	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
					Límite inferior	Límite superior
Miskito	Mayang-na	5,09258*	1,06491	0,000	2,3515	7,8337
	Creole	0,16205	,85733	0,998	-2,0447	2,3688
	Mestizo	0,88041	,54179	0,365	-,5142	2,2750
Mayangna	Miskito	-5,09258*	1,06491	0,000	-7,8337	-2,3515
	Creole	-4,93053*	1,20039	0,000	-8,0203	-1,8407
	Mestizo	-4,21218*	0,99973	0,000	-6,7855	-1,6389
Creole	Miskito	-0,16205	0,85733	0,998	-2,3688	2,0447
	Mayang-na	4,93053*	1,20039	0,000	1,8407	8,0203
	Mestizo	0,71835	0,77488	0,790	-1,2762	2,7129
Mestizo	Miskito	-0,88041	0,54179	0,365	-2,2750	0,5142
	Mayang-na	4,21218*	0,99973	0,000	1,6389	6,7855
	Creole	-0,71835	0,77488	0,790	-2,7129	1,2762

Fuente: Elaboración propia.

Se encontraron diferencias estadísticamente significativas en la especialidades ($P=0,00$), se puede distinguir que los estudiantes presienten que estudiar una especialidad en Ingeniería Agroforestal, Ingeniería Zootecnia, Comunicación Intercultural, Desarrollo Local no recibirán asignaturas relacionadas con las matemáticas. Esta situación puede tener importantes repercusiones cuando los estudiantes se enfrentan con asignatura de matemáticas cuyos contenidos tienen un mayor nivel de complejidad y que pueden tener mucha importancia en su desarrollo profesional posterior. Teniendo en cuenta que, el modelo de formación de la URACCAN constituye una enseñanza de las matemáticas básica en todas las especialidades. El caso del álgebra en particularmente es importante, porque esta área es básica para un buen manejo de las nociones de la matemáticas aplicadas (cálculo diferencial, cálculo integral, matemática financiera, matemática computacional, estadística e investigación de operaciones).

También se encontró que existen diferencias significativas en la variable etnia ($p=0,0126$), y la prueba HSD de Tukey confirma las diferencias estadísticamente significativas entre las etnias, mostrando que la etnia Mayangna posee un mayor grado de dificultad en la resolución de problemas matemáticos. En este particular, la etnia Mayangna vive la dificultad en el aula denominada repertorio bilingüe: español-mayangna; mayangna-español; o trilingüe español-miskitu-mayangna, enfocado especialmente en la práctica docente (Castrillo & Torres, 2010).

Algunos de estos conflictos culturales y de aprendizaje en el aula de matemáticas pueden entenderse desde la diversidad de interpretaciones, a veces incompatibles, de una misma norma entre el miembros del aula (Gorgorió & Planas, 2004). Aunque, estos estudiantes aprenden conceptos aritméticos en su propia lengua su transición a la educación secundaria se complica porque la enseñanza de las matemáticas es en español, y se evidencia en las dificultades de interpretación de las expresiones dada y con la realización de tratamiento y conversión de dichas expresiones (Duval, 2000), particularmente en álgebra, por ejemplo: las dificultades de generalización a partir de algunos casos particulares, como se evidencia en el apartado de dificultades de esta investigación. No obstante, el estado de Nicaragua reconoce las diferencias lingüísticas pero no asume una enseñanza a nivel de educación secundaria en lenguas indígenas, además que no invierte en la revitalización de estas lenguas y a la creación de palabras técnico-científico, para que estos estudiantes puedan asimilar los conceptos matemáticos avanzado.

En definitiva, el lenguaje juega un papel importante en la comprensión de los conocimientos matemáticos, por eso es necesario que en el uso de la lengua natural y de otros sistemas de representación se propicien un desarrollo de las condiciones intelectuales y sociales de los sujetos. Es decir, hay que integrar el capital lingüístico, además del cultural, social y económico de los estudiantes en la construcción del quehacer de las instituciones académicas y particularmente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por otra parte, dada la importancia de las matemáticas para la vida futura de los estudiantes, también se realizó un análisis de varianza en las variables especialidad, género y etnia en relación con los factores actitudinales (ansiedad, utilidad, agrado, motivación y confianza), encontrando que:

- En el factor ansiedad los estudiantes de la especialidad en Psicología en Contexto Multiculturales presentan menor ansiedad, en cambio, los estudiantes de las especialidades en Ingeniería Zootecnia, Desarrollo Local y Comunicación Intercultural son los que poseen más ansiedad hacia las matemáticas, al momento de resolver un problema matemático. En la variable etnia se encontró que los estudiantes pertenecientes a la etnia

Creole tienen menor ansiedad hacia las matemáticas, al contrario, los estudiantes de la etnia Miskito son los que tienen mayor ansiedad, seguidos de los estudiantes Mestizo y Mayangna. Referente a la variable género, tanto hombres y mujeres poseen el mismo grado de ansiedad hacia las matemáticas.

- En el factor utilidad los estudiantes de la especialidad en Administración de Empresa son los que más reconocen la utilidad de las matemáticas, mientras que los estudiantes de las especialidades Ingeniería Zootecnia, Comunicación Intercultural y Desarrollo Local son los que menos reconocen la utilidad de las matemáticas. Referente a la etnia se encontró que los estudiantes provenientes de la etnia Creole creen en la utilidad de las matemáticas, en cambio, los estudiantes de la etnia Mayangna tienden a tener una apreciación menor hacia la utilidad de las matemáticas. Relativo con la variable género, hombres y mujeres reconocen la utilidad de las matemáticas en su vida cotidiana y profesional.
- En el factor agrado, los estudiantes de las especialidades en Medicina Intercultural y Administración de Empresa poseen una tendencia positiva de agrado hacia las matemáticas, pero las especialidades en Ingeniería en Zootecnia, Comunicación Intercultural, Desarrollo Local y Sociología con Mención en Autonomía tienen un menor agrado hacia las matemáticas. Respecto con la variable etnia, se descubrió que los estudiantes de la etnia Creole son los que más sienten que las matemáticas son agradables y estimulantes, pero los estudiantes de la etnia Mayangna son los que tienen un menor agrado a la asignatura de matemáticas. Con respecto a la variable género, se encontró que tanto hombres y mujeres poseen el mismo agrado hacia las matemáticas.
- En el factor motivación, los estudiantes de la especialidad en Psicología en Contexto Multiculturales se sienten motivados en aspectos referidos a las matemáticas. En cambio, los estudiantes de Ingeniería en Zootecnia, Comunicación Intercultural y Desarrollo Local son los que menos motivación sienten al momento de realizar actividades que involucran procedimientos matemáticos. Concerniente con la etnia, los estudiantes de la etnia Creole y Mayangna son los que sienten mayor motivación hacia las matemáticas, pero los de la etnia Miskito no se sienten motivados en procesos relacionados con las matemáticas. Relativo con la variable género, tanto hombres y mujeres sienten el mismo grado de motivación hacia procesos relacionados con las matemáticas.
- En el factor confianza, los estudiantes de Contabilidad Pública y Auditoría poseen más confianza cuando se enfrentan a procesos asociados a las matemáticas, en cambio, los estudiantes de Ingeniería en Zootecnia, Comunicación Intercultural y Desarrollo Local son los que poseen menos confianza cuando se presentan a desafíos que involucran procesos matemáticos. Respecto con la etnia, los estudiantes de la etnia Creole poseen más confianza al llegar a resolver problemas matemáticos, mientras que los estudiantes de la etnia Mayangna son los que poseen menos confianza al tratar de resolver un problema matemático. Relativo con la variable género, encontramos que tanto hombres

y mujeres poseen confianza al enfrentarse a situaciones-problemas que involucren procesos matemáticos.

Teniendo en cuenta que la actitudes hacia las matemáticas están jugando un papel importante en este estudios, también, corroboramos si existen diferencias estadísticamente significativas en las variables especialidad, género y etnia en relación con el papel afectivo hacia las matemáticas a nivel global. El análisis de varianza multifactorial de efectos fijos muestran que los valores-P en las variables especialidad y etnia son menores que 0,005, estas variables tienen un efecto estadísticamente significativo sobre las actitudes hacia las matemáticas con un 95% de nivel de confianza. Destacamos que tanto hombres y mujeres tienden a poseer las misma actitud hacia las matemáticas. Concluimos que las otras especialidades y etnias involucradas en el proceso de investigación tienen una tendencia positiva de agrado, confianza, motivación y utilidad hacia aspecto que involucren procesos matemáticos, lo que ayuda que la ansiedad hacia las matemáticas sea menor en los procesos de resolución de problemas matemáticos.

Tabla 10.12: Análisis de varianza en la puntuación total de la escala de actitud hacia las matemáticas

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Especialidad	64124.8	10	6412,48	31,66	0,0000
Etnia	4613.05	3	1537,68	7,59	0,0001
Género	46,7997	1	46,7997	0,23	0,6307
Residuos	174393	861	202,547		
Total (Corregido)	253081	875			

Fuente: Elaboración propia.

Para determinar entre qué grupo se produjeron estas diferencias estadísticamente significativas se efectuó la prueba de HSD de Tukey. En todos los casos observamos que los estudiantes que provienen de las especialidades en Administración de Empresa y Contabilidad Pública y Auditoria, mientras que los estudiantes que provienen de las especialidades en Ingeniería en Zootecnia, Comunicación Intercultural, Desarrollo Local son los que tienen menos actitudes positivas hacia las matemáticas o actividades que involucren procesos matemáticos.

Tabla 10.13: Resultados de la prueba de HSD de Tukey en las especialidades

(I) Especialidad	(J) Especialidad	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
					Límite inferior	Límite superior
Administración de Empresas	Contabilidad	4,08152	2,41120	0,839	-3,7003	11,8633
	Ing. Civil	3,56419	2,09484	0,835	-3,1966	10,3250
	Ing. Agroforestal	9,17699*	1,91429	0,000	2,9989	15,3551
	Medicina	1,97547	2,18862	0,998	-5,0880	9,0389
	Psicología	-2,96656	1,95527	0,914	-9,2769	3,3438
	Sociología	11,87949*	2,03927	0,000	5,2981	18,4609
	Ing. Zootecnia	27,56419*	2,09484	0,000	20,8034	34,3250
	Comunicación Intercultural	22,99690*	2,64734	0,000	14,4530	31,5408
	Desarrollo Local	21,89690*	2,64734	0,000	13,3530	30,4408
	Informática Administrativa	9,53830*	2,01458	0,000	3,0365	16,0401
Contabilidad Pública y Auditoría	Administración de Empresas	-4,08152	2,41120	0,839	-11,8633	3,7003
	Ing. Civil	-0,51733	2,55690	1,000	-8,7693	7,7347
	Ing. Agroforestal	5,09547	2,41120	0,568	-2,6863	12,8773
	Medicina	-2,10604	2,63428	0,999	-10,6078	6,3957
	Psicología	-7,04808	2,44386	0,130	-14,9353	0,8391
	Sociología	7,79797	2,51157	0,072	-0,3077	15,9037
	Ing. Zootecnia	23,48267*	2,55690	0,000	15,2307	31,7347
	Comunicación Intercultural	18,91538*	3,02618	0,000	9,1488	28,6819
	Desarrollo Local	17,81538*	3,02618	0,000	8,0488	27,5819
	Informática Administrativa	5,45678	2,49157	0,513	-2,5844	13,4980

(I) Especialidad	(J) Especialidad	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
					Límite inferior	Límite superior
Ing. Civil	Administración de Empresas	-3,56419	2,09484	0,835	-10,3250	3,1966
	Contabilidad	0,51733	2,55690	1,000	-7,7347	8,7693
	Ing. Agroforestal	5,61280	2,09484	0,211	-1,1480	12,3736
	Medicina	-1,58871	2,34817	1,000	-9,1671	5,9897
	Psicología	-6,53075	2,13235	0,081	-13,4126	0,3511
	Sociología	8,31530*	2,20963	0,008	1,1841	15,4465
	Ing. Zootecnia	24,00000*	2,26102	0,000	16,7029	31,2971
	Comunicación Intercultural	19,43272*	2,78069	0,000	10,4585	28,4070
	Desarrollo Local	18,33272*	2,78069	0,000	9,3585	27,3070
	Informática Administrativa	5,97411	2,18687	0,187	-1,0837	13,0319
Ing. Agroforestal	Administración de Empresas	-9,17699*	1,91429	0,000	-15,3551	-2,9989
	Contabilidad	-5,09547	2,41120	0,568	-12,8773	2,6863
	Ing. Civil	-5,61280	2,09484	0,211	-12,3736	1,1480
	Medicina Intercultural	-7,20152*	2,18862	0,041	-14,2649	-0,1381
	Psicología	-12,14355*	1,95527	0,000	-18,4539	-5,8332
	Sociología	2,70250	2,03927	0,964	-3,8789	9,2839
	Ing. Zootecnia	18,38720*	2,09484	0,000	11,6264	25,1480
	Comunicación Intercultural	13,81991*	2,64734	0,000	5,2760	22,3638
	Desarrollo Local	12,71991*	2,64734	0,000	4,1760	21,2638
	Informática Administrativa	0,36131	2,01458	1,000	-6,1405	6,8631
Medicina Intercultural	Administración de Empresas	-1,97547	2,18862	0,998	-9,0389	5,0880
	Contabilidad	2,10604	2,63428	0,999	-6,3957	10,6078
	Ing. Civil	1,58871	2,34817	1,000	-5,9897	9,1671
	Ing. Agroforestal	7,20152*	2,18862	0,041	0,1381	14,2649
	Psicología	-4,94203	2,22455	0,490	-12,1214	2,2374
	Sociología	9,90401*	2,29873	0,001	2,4852	17,3228
	Ing. Zootecnia	25,58871*	2,34817	0,000	18,0103	33,1671
	Comunicación Intercultural	21,02143*	2,85200	0,000	11,8170	30,2258
	Desarrollo Local	19,92143*	2,85200	0,000	10,7170	29,1258
	Informática Administrativa	7,56283*	2,27686	0,037	0,2146	14,9110

(I) Especialidad	(J) Especialidad	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
					Límite inferior	Límite superior
Psicología en contextos Multi-culturales	Administración de Empresas	2,96656	1,95527	0,914	-3,3438	9,2769
	Contabilidad	7,04808	2,44386	0,130	-0,8391	14,9353
	Ing. Civil	6,53075	2,13235	0,081	-0,3511	13,4126
	Ing. Agroforestal	12,14355*	1,95527	0,000	5,8332	18,4539
	Medicina Intercultural	4,94203	2,22455	0,490	-2,2374	12,1214
	Sociología	14,84605*	2,07778	0,000	8,1403	21,5518
	Ing. Zootecnia	30,53075*	2,13235	0,000	23,6489	37,4126
	Comunicación Intercultural	25,96346*	2,67712	0,000	17,3235	34,6034
	Desarrollo Local	24,86346*	2,67712	0,000	16,2235	33,5034
	Informática Administrativa	12,50486*	2,05356	0,000	5,8773	19,1324
Sociología	Administración de Empresas	-11,87949*	2,03927	0,000	-18,4609	-5,2981
	Contabilidad	-7,79797	2,51157	0,072	-15,9037	0,3077
	Ing. Civil	-8,31530*	2,20963	0,008	-15,4465	-1,1841
	Ing. Agroforestal	-2,70250	2,03927	0,964	-9,2839	3,8789
	Medicina	-9,90401*	2,29873	0,001	-17,3228	-2,4852
	Psicología	-14,84605*	2,07778	0,000	-21,5518	-8,1403
	Ing. Zootecnia	15,68470*	2,20963	0,000	8,5535	22,8159
	Comunicación Intercultural	11,11742*	2,73907	0,003	2,2775	19,9573
	Desarrollo Local	10,01742*	2,73907	0,012	1,1775	18,8573
	Informática Administrativa	-2,34119	2,13369	0,991	-9,2274	4,5450
Ing. Zootecnia	Administración de Empresas	-27,56419*	2,09484	0,000	-34,3250	-20,8034
	Contabilidad	-23,48267*	2,55690	0,000	-31,7347	-15,2307
	Ing. Civil	-24,00000*	2,26102	0,000	-31,2971	-16,7029
	Ing. Agroforestal	-18,38720*	2,09484	0,000	-25,1480	-11,6264
	Medicina	-25,58871*	2,34817	0,000	-33,1671	-18,0103
	Psicología	-30,53075*	2,13235	0,000	-37,4126	-23,6489
	Sociología	-15,68470*	2,20963	0,000	-22,8159	-8,5535
	Comunicación Intercultural	-4,56728	2,78069	0,864	-13,5415	4,4070
	Desarrollo Local	-5,66728	2,78069	0,622	-14,6415	3,3070
	Informática Administrativa	-18,02589*	2,18687	0,000	-25,0837	-10,9681

(I) Especialidad	(J) Especialidad	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
					Límite inferior	Límite superior
Comunicación Intercultural	Administración de Empresas	-22,99690*	2,64734	0,000	-31,5408	-14,4530
	Contabilidad	-18,91538*	3,02618	0,000	-28,6819	-9,1488
	Ing. Civil	-19,43272*	2,78069	0,000	-28,4070	-10,4585
	Ing. Agroforestal	-13,81991*	2,64734	0,000	-22,3638	-5,2760
	Medicina	-21,02143*	2,85200	0,000	-30,2258	-11,8170
	Psicología	-25,96346*	2,67712	0,000	-34,6034	-17,3235
	Sociología	-11,11742*	2,73907	0,003	-19,9573	-2,2775
	Ing. Zootecnia	4,56728	2,78069	0,864	-4,4070	13,5415
	Desarrollo Local	-1,10000	3,21749	1,000	-11,4840	9,2840
	Informática Administrativa	-13,45860*	2,72074	0,000	-22,2394	-4,6778
Desarrollo Local	Administración de Empresas	-21,89690*	2,64734	0,000	-30,4408	-13,3530
	Contabilidad	-17,81538*	3,02618	0,000	-27,5819	-8,0488
	Ing. Civil	-18,33272*	2,78069	0,000	-27,3070	-9,3585
	Ing. Agroforestal	-12,71991*	2,64734	0,000	-21,2638	-4,1760
	Medicina	-19,92143*	2,85200	0,000	-29,1258	-10,7170
	Psicología	-24,86346*	2,67712	0,000	-33,5034	-16,2235
	Sociología	-10,01742*	2,73907	0,012	-18,8573	-1,1775
	Ing. Zootecnia	5,66728	2,78069	0,622	-3,3070	14,6415
	Comunicación Intercultural	1,10000	3,21749	1,000	-9,2840	11,4840
	Informática Administrativa	-12,35860*	2,72074	0,000	-21,1394	-3,5778
Informática Administrativa	Administración de Empresas	-9,53830*	2,01458	0,000	-16,0401	-3,0365
	Contabilidad	-5,45678	2,49157	0,513	-13,4980	2,5844
	Ing. Civil	-5,97411	2,18687	0,187	-13,0319	1,0837
	Ing. Agroforestal	-,36131	2,01458	1,000	-6,8631	6,1405
	Medicina	-7,56283*	2,27686	0,037	-14,9110	-0,2146
	Psicología	-12,50486*	2,05356	0,000	-19,1324	-5,8773
	Sociología	2,34119	2,13369	0,991	-4,5450	9,2274
	Ing. Zootecnia	18,02589*	2,18687	0,000	10,9681	25,0837
	Comunicación Intercultural	13,45860*	2,72074	0,000	4,6778	22,2394
	Desarrollo Local	12,35860*	2,72074	0,000	3,5778	21,1394

Fuente: Elaboración propia

Las prueba post hoc (HSD de Tukey) mostraron diferencias estadísticamente significativas entre la etnia Creole y las etnias Miskito, Mayangna y Mestizo, siempre a favor de la etnia Creole (véase la tabla 10.14). Los datos corroboran, pues, que los estudiantes pertenecientes a la etnia Creole poseen actitudes positivas hacia las matemáticas.

Tabla 10.14: Resultados de la prueba de HSD de Tukey en las etnias

(I) Etnia	(J) Etnia	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
					Límite inferior	Límite superior
Miskito	Mayangna	4,00980	2,68031	0,440	-2,8893	10,9089
	Creole	-11,86562*	2,15783	0,000	-17,4199	-6,3114
	Mestizo	1,83379	1,36365	0,535	-1,6762	5,3438
Mayangna	Miskito	-4,00980	2,68031	0,440	-10,9089	2,8893
	Creole	-15,87542*	3,02130	0,000	-23,6522	-8,0986
	Mestizo	-2,17600	2,51626	0,823	-8,6528	4,3008
Creole	Miskito	11,86562*	2,15783	0,000	6,3114	17,4199
	Mayangna	15,87542*	3,02130	0,000	8,0986	23,6522
	Mestizo	13,69942*	1,95032	0,000	8,6793	18,7195
Mestizo	Miskito	-1,83379	1,36365	0,535	-5,3438	1,6762
	Mayangna	2,17600	2,51626	0,823	-4,3008	8,6528
	Creole	-13,69942*	1,95032	0,000	-18,7195	-8,6793

Fuente: Elaboración propia.

La dimensión afectiva hacia las matemáticas se manifiesta como un elemento relevante en la etnia Creole, ya que son el segundo grupo étnico que más pueden resolver problemas matemáticos, lo que indica que a los estudiantes podrían gustarles las matemáticas y a la vez creer que la resolución de problemas constituye siempre la búsqueda de una respuesta correcta de la manera correcta. Según Gómez-Chacón (2000) esta creencia, a su vez, influye sobre sus acciones cuando se enfrentan a la resolución de un problema. Aunque estos estudiantes tengan una disposición positiva hacia las matemáticas, no muestran sin embargo los aspectos esenciales de lo que se viene llamando actitud matemática.

Concerniente al **OBJETIVO ESPECÍFICO 5**, tratamos de: “*Explicar las dificultades detectadas en la resolución de problemas matemáticos en términos de los procesos matemáticos y las actitudes hacia las matemáticas*”; el análisis realizado en las prácticas discursivas y operativas recoge los significados personales de los estudiantes universitarios al realizar las tareas de resolución de problemas. En el marco del enfoque ontosemiótico, el análisis de estos significados requiere la construcción de los significados institucionales, los cuales actúan como referente a la hora de explicar los conflictos con los que se encuentran los estudiantes. En nuestra investigación estos significados de referencia son los procesos

matemáticos para cada una de las tareas propuestas en el cuestionario cognitivo. En este sentido, se puede expresar que la complejidad en la resolución de tareas matemáticas tiene su inicio en las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas, las que conlleva a producir obstáculos cognitivos y errores que tienen su origen en una ausencia de sentido, que se originan en los distintos niveles de complejidad de resolución de problemas, tipificándose de la manera siguiente:

- Responder a cuestiones en contextos muy conocidos, responder a cuestiones en contextos muy poco familiares, responder a cuestiones complejas en multitud de contextos y formar y relacionar conceptos.
- Elaborar argumentos basados en sus acciones, formular los razonamientos desarrollados y elaborar argumentos desde su propia reflexión,
- Describir los resultados obtenidos, realizar explicaciones sencillas y comunicar conclusiones con precisión.
- Usar modelos explícitos en situaciones concretas, y desarrollar y usar modelos en múltiples situaciones.
- Resolver problemas con datos sencillos, seleccionar y aplicar estrategias sencillas, seleccionar, comparar y evaluar estrategias y generalizar resultados de problemas.
- Leer datos directamente de tablas y figuras, usar un único tipo de representación, conocer y usar diferentes sistemas de representación, vincular diferentes sistemas de representación incluyendo el simbólico y relacionar y traducir con fluidez diferentes sistemas de representación.

Lo anterior, nos permite responder a la **HIPÓTESIS 4**: “*La recurrencia a las configuraciones cognitivas de bajo nivel se relacionan con la complejidad de los objetos y procesos requeridos para la resolución de problemas matemáticos*”; los objetos y procesos implicados en cada uno de los ítems del cuestionario cognitivo permiten describir, desde el punto de vista institucional, las dificultades en los procesos matemáticos -pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, modelar, representar y plantear y resolver problemas- para abordar tareas matemáticas, lo que ayuda a dar una explicación de la alta incidencia de configuraciones cognitivas de bajo nivel. Desde esta perspectiva, encontramos que la recurrencia a las configuraciones cognitivas de bajo nivel se deben a dificultades como:

- Utilizar una representación bidimensional dada para contar o calcular elementos de un objeto; esto, en particular, se produce porque los estudiantes no se aproximaron a razonar matemáticamente, es decir, a realizar deducciones e inducciones que ayudan a particularizar, generalizar y argumentar las decisiones, así como los procesos y las técnicas.
- Realizar una reflexión sobre las relaciones entre una fórmula algebraica y los datos subyacentes, así como interpretar y explicar información matemática compleja en el contexto de una situación real desconocida; dichos problemas influyen en la manera en

que los estudiantes explican la solución de un problema y también en cómo justifican y demuestran su solución.

- Aplicar cálculos sencillos para resolver problemas en una conversión de registro en un contexto geométrico, aplicar algoritmo rutinarios para resolver problemas geométricos y simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones. Estas dificultades influyen por la forma en que los estudiantes expresan y representan la información matemática y la manera en que interpretan dicha información.
- Reflexionar sobre la relación entre una fórmula algebraica y los datos subyacentes, esto se debe a que los estudiantes no entienden las matemáticas como un conjunto de ideas y formas de actuar que conllevan a obtener modelos e identificar relaciones y estructuras.
- Concebir y elaborar una estrategia que transforman la información dada para llegar a una conclusión. Incluso con el uso de una estrategia para encontrar una solución exhaustiva o una conclusión generalizadora. Estas dificultades se manifiestan por no cultivar en los estudiantes la habilidad para resolver lo desconocido, con el objetivo que les permita comprender, identificar, plantear y resolver distintas situaciones del mundo real al mundo de las matemáticas utilizando una variedad de métodos.
- Determinar la cantidad desconocida que aparece en el problema realizando operaciones algebraicas y aritméticas, identificar los cálculos simples necesarios para resolver un problema sencillo en un contexto multiplicativo, términos, definiciones, técnicas básicas y aplicar conceptos geométricos básicos, interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor y analizar un modelo matemático dada que implique una fórmula compleja. Estos conflictos se deben a que los estudiantes no pueden descodificar, interpretar, comparar y diseñar una o varias representaciones que reflejen los aspectos clave de una situación compleja.

Otro aspecto relevante a mencionar es lo planteado en la **HIPÓTESIS 5**: “*La actitud positiva hacia las matemáticas se relaciona con la recurrencia a configuraciones cognitivas de alto nivel en la resolución de problemas matemáticos*”; con respecto a esta hipótesis, podemos decir que existe una relación lineal, es decir, una relación significativa, lo que se traduce: que al crecer la actitudes hacia las matemáticas crece la recurrencia a configuraciones cognitivas de alto nivel en la resolución de problemas matemáticos. Esto se confirma con el coeficiente de correlación ordinal de Kendall, el cual nos indica, que cuando los estudiantes se presentan a situaciones matemáticas se activan emociones y sentimientos como la utilidad, el agrado, la confianza y la motivación, lo que ayuda que la ansiedad hacia las matemáticas sea menor en los procesos de resolución de problemas matemáticos. En definitiva, las actitudes hacia las matemáticas parecen favorecer la comprensión de los objetos y procesos matemáticos, por tanto, asumimos que se asocian a la recurrencia a configuraciones cognitivas de alto nivel en la resolución de problemas matemáticos.

10.3 APORTACIONES, LIMITACIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

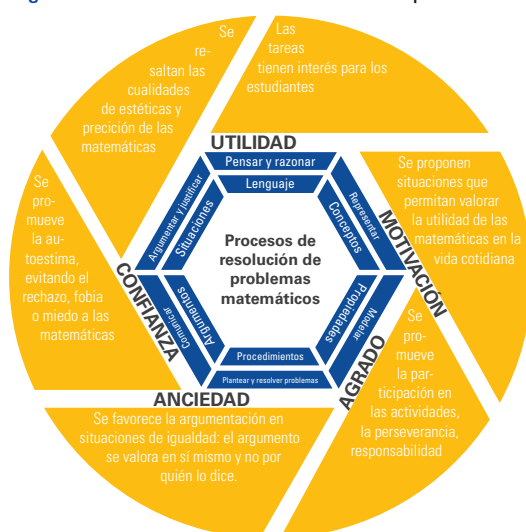
El dominio sobre las matemáticas se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar, y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. En este sentido, la resolución de problemas matemáticos es un factor indispensable de estudio, dado que forma parte indisoluble del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por lo cual, requiere su propio espacio para ser investigado. Por tales razones, a continuación describimos aportaciones, limitaciones, y perspectivas futuras que surgen del trabajo de investigación llevado a cabo.

10.3.1 Aportaciones del trabajo

Esta investigación se centró en comprender las prácticas que realizan los estudiantes universitarios para resolver un problema y su relación con las actitudes hacia las matemáticas. Se ha tenido en cuenta que la resolución de cualquier problema matemático lleva asociado una situación afectiva para el sujeto implicado, quien pone en juego no solamente prácticas operativas y discursivas para dar una respuesta al problema, sino también moviliza creencias, actitudes, emociones o valores que condicionan, en mayor o menor grado y diferente sentido, la respuesta cognitiva requerida (Godino, 2011).

En este sentido, esta investigación aporta un modelo de análisis en los procesos de resolución de problemas matemáticos por estudiantes universitarios, partiendo de los objetos primarios (lenguaje, conceptos-definiciones, propiedades, procedimientos, argumentos y situaciones-problemas) y su relación con los procesos matemáticos y las actitudes hacia las matemáticas, véase la figura 10.1.

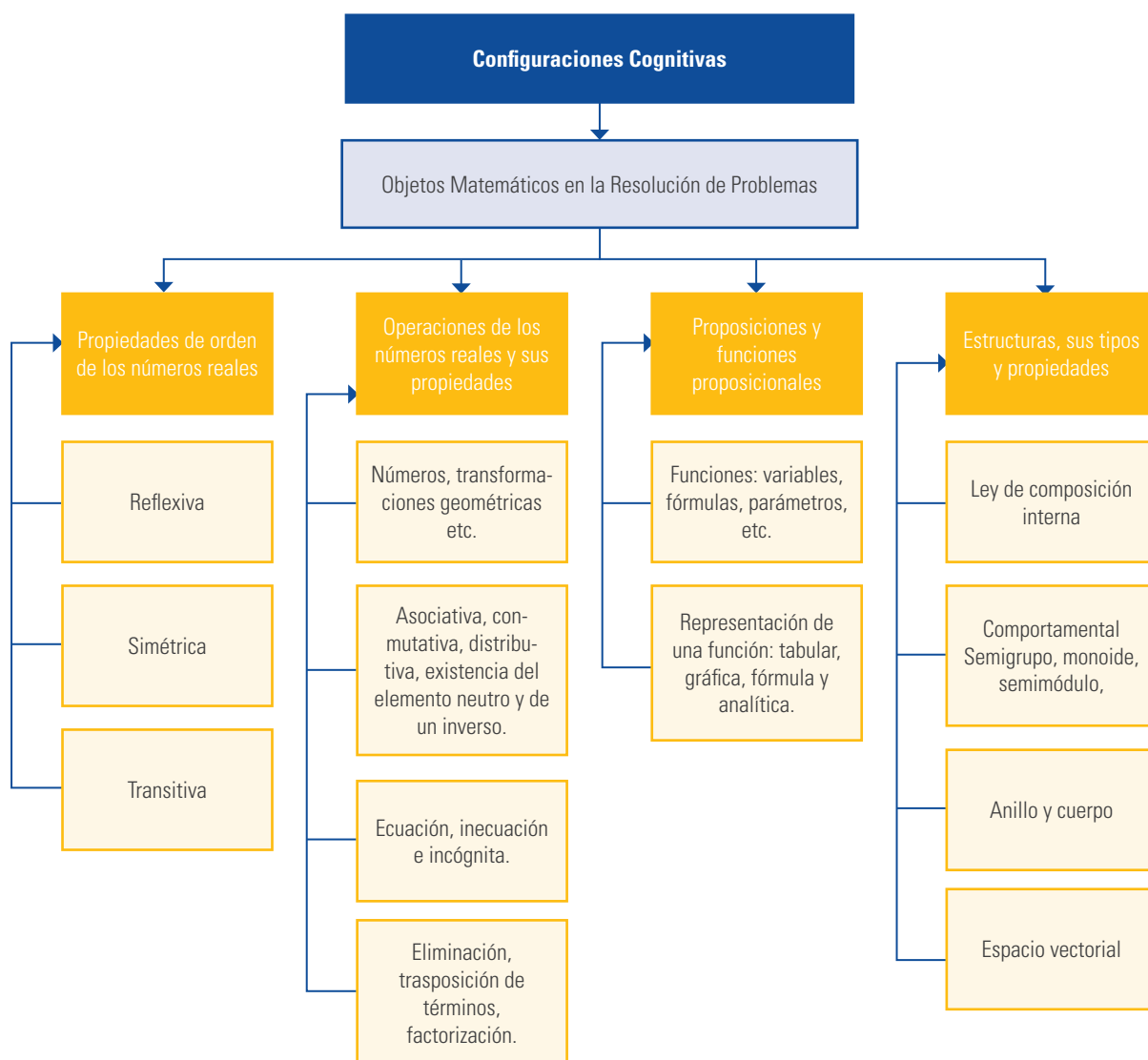
Figura 10.1: Modelo de análisis en los procesos de resolución de problemas



Fuente: Elaboración propia.

Referente a los tipos de objetos matemáticos, el análisis de las configuraciones cognitivas, nos permitió describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los estudiantes al resolver tareas, como los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) que intervienen en las prácticas que permiten la resolución de problemas matemáticos. En la figura presentamos los objetos matemáticos que los estudiantes utilizaron en la resolución de problemas.

Figura 10.2: Tipos de objetos implicados en la resolución de problemas matemáticos



Fuente: Elaboración propia.

De igual manera, ponemos en evidencia la importancia de los procesos matemáticos que los estudiantes activan para tratar de resolver un problema, se pueden contemplar, bajo los supuestos de Rico (2006), que considera como potenciales a los procesos matemáti-

cos –pensar y razonar, argumentar, comunicar, representar, modelar, plantear y resolver problemas- para abordar las tareas matemáticas. La tabla 10.5, resume dichos procesos matemáticos y su relación con las categorías donde se desarrollan.

Tabla 10.15: Descriptores que caracterizan los distintos procesos matemáticos

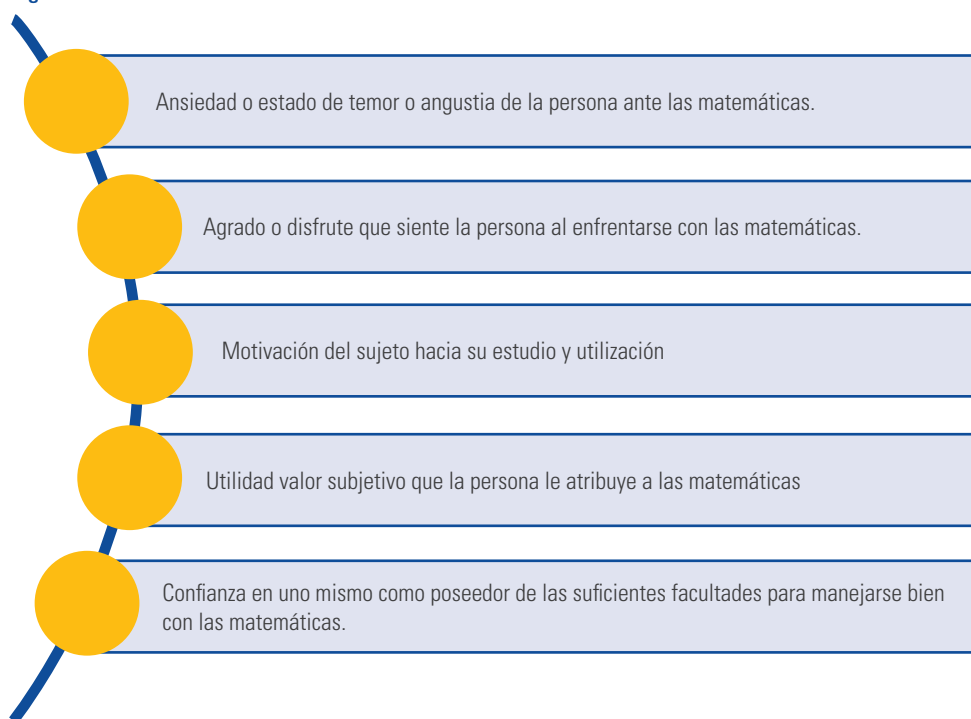
Procesos Matemáticos	La aritmética generalizada	Estudios de procedimiento para resolver problemas	Estudios de relaciones entre cantidades	Estudio de estructura
Pensar y Razonar	Realizar cálculos sencillos que implican relaciones entre dos variables conocidas. Utilizar una representación bidimensional dada para contar o calcular elementos de un objeto.	Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando restricciones del problema.	Realizar cálculos sencillos que implican relaciones entre una variable conocida: Situación algebraica en contexto de la propiedad conmutativa.	Sustituir correctamente los números para aplicar un algoritmo numérico o fórmula algebraica sencilla. Llevar a cabo cálculos explícitamente descritos que comprenden procesos secuenciales. Utilizar los datos relevantes de la descripción de una situación compleja y realizar los cálculos correspondientes.
Argumentar y Justificar			Interpretar y conocer representaciones complejas para resolver un problema práctico. Interpretar y explicar información matemática compleja en el contexto de una situación real desconocida.	Reflexionar sobre la relación entre una fórmula algebraica y los datos subyacentes.
Comunicar	Aplicar cálculos sencillos para resolver problemas en una conversión de registro en un contexto geométrico. Aplicar algoritmos rutinarios para resolver problemas geométricos.	Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero. Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones	Sustituir correctamente los números para explicar la relaciones entre dos variables desconocidas. Interpretar las relaciones entre dos variables a través de la sustitución de un número conocido.	

Procesos Matemáticos	La aritmética generalizada	Estudios de procedimiento para resolver problemas	Estudios de relaciones entre cantidades	Estudio de estructura
Modelar			Utilizar representaciones múltiples para resolver un problema práctico, es decir, interpretar y comprender significados.	Reflexionar sobre la relación entre una fórmula algebraica y los datos subyacentes.
Plantear y resolver problemas		Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero, en un contexto aditivo y multiplicativo. Interpretar las variables simbólicas que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.	Usar comprensivamente el álgebra para resolver problemas; capacidad de manejar expresiones algebraicas para traducir una situación del mundo real. Aplicar la comprensión geométrica profunda para trabajar con patrones complejos y generalizados.	Utilizar los datos relevantes de la descripción de una situación compleja y realizar los cálculos correspondientes.
Representar	Interpretar y aplicar formulas verbales y manejar y utilizar formulas lineales que represente relaciones del mundo real. Aplicar algoritmos rutinarios para relacionar diferentes representaciones de objetos.	Determinar la cantidad desconocida que aparece en el problema realizando operaciones algebraicas y aritméticas. Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.	Utilizar términos y definiciones técnicas básicas y aplicar conceptos geométricos básicos. Interpretar el lenguaje algebraico en los cuales se oculte algún algoritmo sencillo y aplicar dicho algoritmo. Analizar un modelo matemático dado que implique una fórmula compleja, es decir, deducir reglas y métodos generales en secuencias de familias de problemas. Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica en situaciones algebraicas en contexto aditivo y multiplicativo.	Identificar los cálculos simples necesarios para resolver un problema sencillo en un contexto multiplicativo. Realizar cálculos sencillos que incluyan las operaciones aditivas. Realizar cálculos sencillos que impliquen operaciones aditivas: operaciones de las variables en campo numérico.

Fuente: Elaboración propia.

“Sería un error el creer que la solución de un problema es un asunto puramente intelectual, la determinación y las emociones juegan un papel importante. Una determinación un tanto tibia, un vago deseo de hacer los menos posibles pueden bastar a un problema de rutina que se plantea en la clase; pero para resolver un problema científico serio, hace falta una fuerza de voluntad capaz de resistir años de trabajos y de amargos fracasos” (Polya, 1965, p. 80). Por tanto, un objetivo en la enseñanza y aprendizaje de la matemáticas, es que los estudiantes desarrollen actitudes, creencias y emociones que aumenten sus probabilidades de utilizar con éxito las matemáticas que saben y de aprender más matemáticas. Para ello, es necesario tomar en cuenta los factores actitudinales asociados a las matemáticas.

Figura 10.3: Factores actitudinales asociados a las matemáticas



Fuente: Elaboración propia.

Factores que se relacionan con las habilidades de los estudiantes cuando enfrentan problemas fáciles y difíciles, así como, estimulan a los estudiantes a reflexionar sobre sus razonamientos durante los procesos de resolución de problemas de manera tal que son capaces de aplicar y adaptar las estrategias que han desarrollado en otros problemas, y mantienen su perseverancia aun cuando la tarea sea compleja.

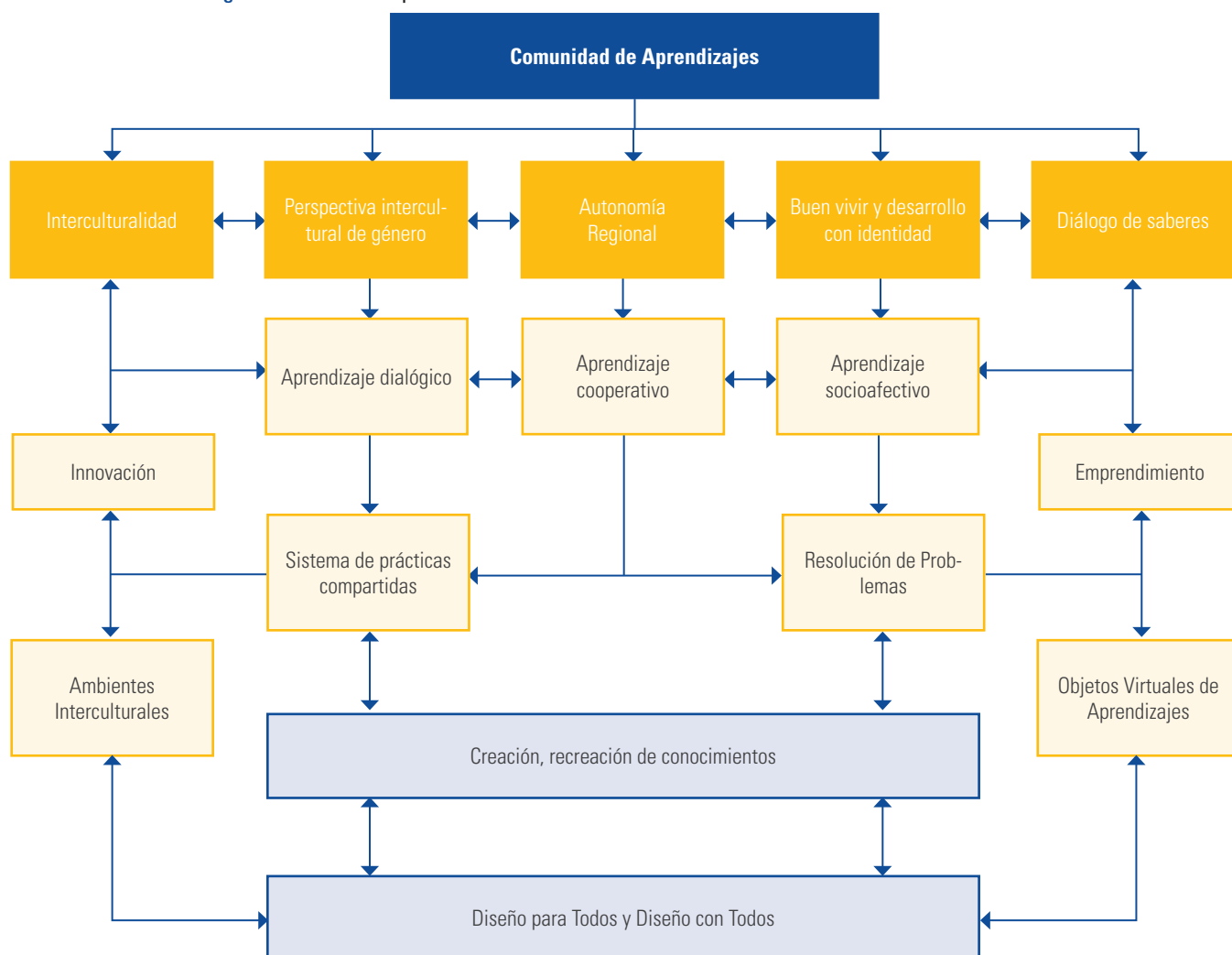
Otro aspecto a destacar, son las dificultades en la práctica de resolución de problemas matemáticos que se asocian a obstáculos cognitivos (uso y dominio del concepto de variable), así como una ausencia de sentido que se origina en los distintos estadios (semiótico, estructural, autónomo) que se dan en los sistemas de representación: Todo ello, lo podemos diferenciar en las etapas siguientes:

- Dificultades del álgebra que tienen su origen en la aritmética.
- Errores procedimentales: relativos al mal uso de la propiedad distributiva, relativo al uso de recíprocos, errores de cancelación.
- Dificultades debidas a la naturaleza del lenguaje algebraico dentro del contexto de las poblaciones en diversidad lingüística y étnica.
- Dificultades en el proceso de generalización.

Por lo tanto, para mejorar el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes universitarios, es necesario iniciar con el reconocimiento de la diversidad en la clase de matemática a partir del Diseño para Todos y el Diseño con Todos para la enseñanza de las matemáticas en la Universidad, promoviendo situaciones encontradas en la vida diaria, incluidos los contextos profesionales, los cuales requieren un cierto agrado de comprensión de las matemáticas, razonamiento matemáticos y herramientas matemáticas antes de poder entenderlas y abordarlas en su totalidad. Teniendo en cuenta que aprender a resolver problemas matemáticos es una herramienta esencial para los jóvenes a la hora de afrontar cuestiones y desafíos relativos a aspectos profesionales, socioculturales y científico de su vida. Además, que las actitudes hacia las matemáticas juegan un papel importante en la resolución de problemas.

En este contexto, proponemos un modelo de enseñanza centrado en el Diseño para Todos y el Diseño con Todos para la enseñanza de las Matemáticas en la Universidad. Partiendo de la idea que el diseño para todos es un punto de partida que orienta la intencionalidad didáctica de un formador y plantea exigencias (León, et al, 2013): de orden epistemológico, que se refieren a quienes son “todos”, cuando se consideran diseños curriculares y didácticos en matemáticas, son sujetos epistemológicos con potencial de aprendizaje, o sujetos con existencia real en la sociedad y con necesidades de aprendizaje. De orden práctico, en tanto que la acción didáctica requiere trascender el potencial de enseñanza y aprendizaje presente en un diseño para todos, a la realización de una acción de enseñanza vinculada a un hecho de aprendizaje con todos.

Figura 10.4: Modelo para la enseñanza de las matemáticas en la universidad



Fuente: Elaboración propia.

Este tipo de diseños requieren su articulación en políticas no marginales de educación para todos, y la formulación de respuesta y soluciones a preguntas y problemas derivados de: la situación de pobreza de la mayoría de las poblaciones; de las diferencias de las condiciones educativas de esas poblaciones por la no culminación de sus estudios y la deserción escolar; así como de la marginación escolar de algunas poblaciones por su condición de existencia (lengua, etnia, género, discapacidad). El segundo aspecto “Un diseño con todos”, se refiere a que las formas de concentración de las poblaciones plantean el problema de estar con todos, en el momento de vida apropiado, en el lugar necesario y con los recursos adecuados.

El escenario de este modelo se sustenta en un análisis preliminar, el modelo de resolución de problemas, situaciones didácticas en ambientes interculturales y pluritecnológicos y el análisis a posteriori:

- **Análisis preliminar:** se basa en un análisis desde la perspectiva (Brousseau, 1986) que parte de la dimensión epistemológica: asociado a las características del conocimiento en juego; dimensión cognitiva: asociada a las características de los estudiantes que recibirán la enseñanza; y dimensión didáctica: asociada a las características de los trabajos en el sistema educativo.
- **Situaciones didácticas en ambientes interculturales y pluritecnológicos:** para su construcción metodológica se toma en cuenta el enfoque intercultural orientado en una comunidad de aprendizaje en términos de sistemas de prácticas compartidas y aprendizaje dialógico, lo que posibilita la exploración de los aprendizajes, la conceptualización de los aprendizajes, la aplicación de los aprendizajes, la evaluación de los aprendizajes y objetos virtuales de aprendizaje en poblaciones en contexto de diversidad.
- **Modelo de resolución de problemas** que parte de la idea de Polya (1965): formular o plantear problemas; modelo de resolución: analizar y comprender el problema, diseño de estrategia, ejecución de las estrategias y revisión del problema, del resultado y toma de decisiones; el reconocimiento de la diversidad; y del dominio afectivo o actitudes que los estudiantes poseen hacia las matemáticas.
- **Análisis a posteriori:** se basa en todos los datos recogidos durante la experimentación (como observaciones hechas durante las sesiones de enseñanza y también trabajos de los estudiantes realizados durante y fuera de clases). Estos datos pueden venir acompañados de datos obtenidos con el uso de metodologías externas, como cuestionarios o entrevistas individuales o grupales realizadas en varios momentos de la enseñanza o después de ella.

Finalmente, se tiene que reconocer que la convergencia entre la matemática como disciplina consolidada, la didáctica de las matemáticas como una disciplina en desarrollo y la evolución del campo tecnológico en los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula (tomando como aula el espacio físico o virtual donde interactúan profesores y estudiantes) favorece el desarrollo del aprendizaje matemático de los estudiantes universitarios en contexto de diversidad.

10.3.2 Limitaciones del trabajo

Referente a las limitaciones del presente estudio y respecto a la metodología utilizada, comentamos que, éramos conscientes de que el mundo en el que nos metíamos es muy cambiante, y que el tiempo es poco. Por ejemplo:

- El cuestionario que hemos utilizados para evaluar los procesos de resolución de problemas matemáticos en estudiantes universitarios, si bien ha considerado todas las categorías y subcategorías que componen los niveles de complejidad de resolución de problemas en un contexto algebraico, lo hace de manera inicial y parcial, centrándose solo en algunos aspectos que propone Godino (2009).
- Es necesario ampliar el cuestionario sobre resolución de problemas matemáticos con otros contenidos y preguntas que permitan indagar en mayor profundidad en cada uno de los conocimientos que se desee evaluar. Por ejemplo, contenidos de geometría y estadística.
- Se debería realizar un estudio en mayor profundidad, centrándose en la observación de clases, para analizar las interacciones que se dan, la revisión de planificaciones y de entrevistas clínicas en profundidad con los estudiantes participantes. Condiciones a las que durante el transcurso de esta investigación no fue posible acceder. Por lo que se decidió analizar las prácticas discursivas y operativas de los estudiantes universitarios cuando resuelven problemas matemáticos.
- Tampoco fue posible realizar estudios de casos con determinados estudiantes, lo que hubiera permitido un seguimiento detallado tanto de sus formas de abordar los problemas como del proceso de evolución de las competencias sobre la identificación de objetos y procesos matemáticos.
- No se consideró en el estudio el análisis de libros texto de matemáticas que aborde la resolución de problemas, debido que en el contexto de Nicaragua no existen libros que retomen la temática de resolución de problemas para la enseñanza de las matemáticas.
- Referente a las actitudes hacia las matemáticas, aunque la escala es adaptable al contexto de la muestra poblacional (poblaciones con diversidad lingüística y universitaria), sin embargo, es necesario hacer un análisis en profundidad por componentes: afectivo, cognitivo, valor y dificultad. Cuya finalidad es saber si la actitud hacia las matemáticas de los estudiantes universitarios está relacionada con la construcción del conocimiento matemático avanzado.

10.3.3 Perspectivas futuras

En el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, los diseños didácticos suponen proponer un conjunto de actividades y tareas que orientan las experiencias en las que participan los estudiantes, teniendo como referentes generales la diversidad y la incorporación de tecnologías accesibles. Así, se deben seleccionar, organizar y planificar las experiencias de aprendizaje necesarias para que una persona aprenda y, en particular, para que un estu-

dianter en un contexto de diversidad adquiriera el conocimiento matemático. Por lo anterior, participar de la tarea del diseño forma parte de la identidad que caracteriza la práctica de la enseñanza por parte del profesor, toda vez que se requiere que reflexione antes, durante y después de su acción. La investigación basada en el diseño que se desarrolla en, sobre y dentro del mismo ha puesto de manifiesto que, para proponer ambientes de aprendizaje, se requiere construir, experimentar, evaluar y rediseñar hipótesis de trayectorias de aprendizaje.

Desde este ámbito, los procesos de formación tienen que estar orientado en un sistema de prácticas compartidas entre la universidad, la comunidad, el estado, la sociedad civil organizada y el sector productivo y empresarial. Partiendo de la idea que la comunidad de práctica se constituye si entre sus miembros existe un compromiso mutuo de realizar una cierta empresa, lo que lleva a una práctica compartida en la que se genera aprendizaje compartido y significativo. Dado que a través de ellos se puede, por una parte, transferir y generar nuevo conocimiento y, por otra, lograr mejores prácticas que permitan enlazar el conocimiento endógeno con el conocimiento exógeno. Todo este planteamiento nos permite avalar la necesidad de fomentar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva de comunidades de aprendizaje; creación y recreación de conocimientos, saberes y prácticas; estrategia de acompañamiento e incidencia social y comunitaria; gestión y comunicación intercultural para el desarrollo institucional; cooperación, solidaridad y complementariedad nacional e internacional.

Por consiguiente, es necesario de seguir trabajando en la línea de aspectos fundamentales:

- El papel de lo afectivo en la resolución de problemas.
- Lo socioafectivo en el aprendizaje de las matemáticas.
- Lo socioafectivo en la enseñanza de resolución de problemas.
- Diseño con todos y Diseño para todos para la enseñanza de resolución de problemas.
- Las múltiples experiencias con lo matemático y su didáctica.
- Las múltiples representaciones de lo matemático y de su didáctica.
- Los múltiples tipos de interacción en los ambientes de aprendizaje.
- La presencia de las tecnologías accesibles.
- Una metodología de interacción entre diversos y de desarrollo cooperativo, definida por las comunidades de prácticas.

10.4 PUBLICACIONES DERIVADAS DE LA TESIS DOCTORAL

10.4.1 Artículos de revista

Flores, W., O., & Auzmendi, E. (2015). Análisis de la estructura factorial de una escala de actitud hacia las matemáticas. *Aula de Encuentro*, 17(1), 45-77.

Flores, W., O., & Auzmendi, E. (2015). Resolución de problemas matemáticos: Un cuestionario para su evaluación y comprensión. *Ciencia e Interculturalidad*, 16(1), 54-74.

10.4.2 Comunicaciones en actas de congresos referidas

Flores, W., O., & Auzmendi, E. (2015). Integración de las tecnologías de la información y comunicación en la formación de profesores de matemáticas en y para la diversidad. En C. Varela, A. Miñán & L. Bengochea. (Eds.) *Congreso Internacional Sobre Formación virtual inclusiva y de calidad para el siglo XXI* (281-288). Granada: Universidad de Granada.

Flores, W., O., & Auzmendi, E. (2015). Ambientes Interculturales y Pluritecnológicos desarrollan el aprendizaje de las matemáticas en y para la diversidad. En C. Varela, A. Miñán & L. Bengochea. (Eds.) *Congreso Internacional Sobre Formación virtual inclusiva y de calidad para el siglo XXI* (318-326). Granada: Universidad de Granada.

Flores, W., O., & Auzmendi, E. (2015). Los problemas de comprensión del álgebra en estudiantes universitarios. En F. Perera & F. Valiente (Eds.). *Primer Congreso de la Comunidad Matemática de la Costa Caribe Nicaragüense*. Nicaragua: URACCAN.

REFERENCIAS

- Aiken, L. R., & Dreger, R. M. (1961). The effect of attitude on performance in mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 52, 19-24.
- Aiken, L. R. (1972). Research on attitudes toward mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 19 (3), 229-234.
- Aiken, L. R. (1974). Two scales of attitude toward mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 5, 67-71.
- Aiken, L. R. (1979). Attitudes toward mathematics and science in Iranian middle School. *School Science and Mathematics*, 79, 229-234.
- Adelson, J. L., & McCoach, D., B. (2011). Development and psychometric properties of the math and me survey: Measuring third through sixth graders' attitudes toward mathematics. *Measurement and Evaluation in Counseling and Development*, 44 (1), 225-247.
- Akin, A., & Kurbanoglu, N. (2011). The relationships between math anxiety, math attitude and self-efficacy: A structural equation model. *Studia Psychologica*, 53 (3), 263-273.
- Alemany, I., & Lara, A. I. (2010). Las actitudes hacia las matemáticas en el alumnado de la ESO: un instrumento para su medición. *Publicaciones*, 40, 49-71.
- Alcock, L. (2004). *Uses of example objects in proving*. In A. Cockbur & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International for the Psychology of Mathematics Education* (17-24). Bergen: PME28.
- Alsina, A. (2004). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdicos-manipulativos*. Madrid: Narcea.
- Alvarez, Y., & Ruiz, M. (2010). Actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de ingeniería en las universidades autónomas venezolanas. *Revista de Pedagogía*, 31(89), 225-249.

- Allport, G. W. (1935). Attitudes. In C. Murchinson (Ed.). *A Handbook of Social Psychology* (798-844). Worcester: Clark University Press.
- Anastasi, A., & Urbina, S. (1998). *Psicología*. Mexico: Prentice Hall.
- Antibi, A., & Brousseau, G. (2000). Le dé-transposition de connaissances scolaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(1), 7-40.
- Arévalo, I., Pardo, K., & Vigil, N. (2006). *Enseñanza del castellano como segunda lengua en las escuelas EIB del Perú*. Recuperado el 15 de 10 de 2014, de Aula Intercultural: www.aulaintercultural.org
- Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 241-286.
- Artigue, M. (1995). The Role of Epistemology in the Analysis of Teaching/Learning Relationships in mathematics education. In Y., M. Pothier (Ed.) *Proceedings of the 1995 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (7-22). Ontario: University of Western.
- Artigue, M. (1999). The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level. Crucial Questions for Contemporary Research in Education. *Notices of the AMS*, 46(11), 1377-1385.
- Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at University level?. In D. Holton (Ed.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (207-220). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Auzmendi, E. (1991). *Evaluación de las actitudes hacia la estadística en alumnos universitarios y factores que la determinan*. Tesis doctoral. Universidad de Deusto. Bilbao.
- Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Bilbao: Mensajero.
- Azcárate, P. (2001). *El conocimiento profesional didáctico-matemático en la formación inicial de los maestros*. Cádiz: Universidad de Cádiz.
- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Librairie Philosophique.

- Bachratá, K., & Bachraty, H. (2011). E-learning in mathematics. In A. Szakál (Ed.). *ICETA-9th IEEE International Conference on Emerging eLearning Technologies and Applications* (11-16). Kosice, Slovakia: Tech. Univ. of Kosice.
- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Barbero, M. (2003). *Psicometría II. Métodos de elaboración de escalas*. Madrid: UNED.
- Batanero, C., & Díaz, C. (2003). Análisis de Construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. Reflexiones desde el marco de las Teoría de las Funciones Semióticas. . En A. Contreras, L. Ordoñez, & C. Batanero. (Eds.). *Congreso Internacional sobre las Aplicaciones y Desarrollo de la Teoría de las Funciones Semióticas* (15-39). España: Universidad de Jaen.
- Batanero, C., & Díaz, C. (2006). Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. *Educación Matemática*, 8(2), 197-223.
- Bazán, J., & Sotero, H. (1998). Una aplicación al estudio de actitudes hacia la matemática en la Unalm. *Anales Científicos UNALM*, 36, 60-70.
- Benbachir, A., & Zaki, M. (2001). Production d'exemples et de contre-exemple en Analyse: Étude de cas en première d'Université. *Educational Studies in Mathematics*, 47(3), 273-295.
- Berger, M. (2004). The Functional use of mathematical Sign. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1/3), 81-102.
- Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática*. Barcelona: Paidós Ibérica.
- Bishop, A. (2005). *Aproximación socio cultural a la educación matemática*. Barcelona: Paidós.
- Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.
- Bisquerra, R. (2012). *Metodología de la Investigación Educativa*. Madrid: Muralla.
- Bolívar, A. (2005). Conocimiento didáctico del contenido y didácticas específicas. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 9 (2), 1-39.

- Bolea, P., Bosch, M., & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21(3), 247-304.
- Bosh, M., & Gascón, J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. En C. De Castro & M. Gómez (Eds.). *Investigación en Educación Matemática* (26-28). Madrid: SIIDM-SEIM.
- Boyer, C. (1992). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (1998). *La téori des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Caballero, A., Guerrero, E., Blanco, L., & Piedehierro, A. (2009). *Resolución de problemas de matemáticas y control emocional*. En M. J. González, M. T. González, & J. Murillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemáticas XIII* (151-160). Santander: SEIEM.
- Caballero, A., Guerrero, E., & Blanco, L. (2014). *Construcción y administración de un cuestionario para la evaluación de los afectos hacia las matemáticas*. *Campo Abierto*, 33(1), 47-71.
- Cacioppo, J. T., & Gardner, W. L. (1999). Emoción. *Annual Review of Psychology*, 50, 191-214.
- Cajaraville, J., Cachafeiro, L., Fernández, T., Ferro, & Salinas, M. (2012). *Problemática Didáctica del estudio del álgebra en educación secundaria*. Santiago de Compostela: Imprenta Universitaria.
- Calderón, D., León, O., & INCI, E. (2010). *Incidencia de la representaciones sociales sobre la ceguera en el acceso del niño ciego a la educación básica primaria*. Bogotá: INCI-Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Calderón, D., & León, O. (2010). Bilingualism of Colombian Deaf Children in the Teaching-Learning of Mathematics in the First Year of Elementary School *Colombia. Applied Linguistics Journal*, 12(2), 9-24.
- Calderón, I., Soler, S., Muñoz, G., Rojas, G., Medina, G., Couder, E., Blandón, C., Centeno, B., Zeledón, O., Laínez M., Espinoza, E., Gómez, C., Rocha, R., Zarceño, A., An-

- dreu, P., Arce, V., Sáenz, T., & Portilla, L. (2013). CALE: Orientaciones específicas para integración de tecnología en la enseñanza del lenguaje y comunicación. En C. Merino, D. Contreras, & M. Borja (Eds.), *Orientaciones Específicas para la incorporación de tecnología en procesos de formación de profesores de Ciencias Naturales, Lenguaje y Comunicación y Matemáticas en contextos de diversidad de secuencias de enseñanza-aprendizaje* (111-151). Valparaíso: Universidad de Valparaíso.
- Callejo, M. L. (1994). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea.
- Cantoral, R., & Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su Evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.
- Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J., & Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9(1), 83-102.
- Carmines, E., G. & Zeller, R., A. (1979). *Reliability and validity assesment*. Sage University Paper.
- Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la Estadística. *Statistics Education Research Journal*, 3(1), 5-28.
- Cardoso, E. O., & Vanegas, E. A. (2012). Diagnostico sobre la actitud hacia las matemáticas en tres posgrados en administración de empresa. *Revista Electrónica Educared*, 16(2), 237-253.
- Castrillo, V., & Torres, A. (2010). Elementos lingüísticos que obstaculizan el aprendizaje de los nombres de los números naturales en Miskitu. *Ciencia e Interculturalidad*, 6(1), 45-57.
- Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M., Martínez, S., & Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en educación infantil. *Números una Revista de didáctica de las matemáticas*, 80, 53-70.
- Cazorla, I. M., Silva, C. B., & Brito, M. R. (1999). Adaptação e validação de uma escala de attitudes em relação à estatística. *Conferencia Internacional Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística* (45-58). Florianópolis: Presta.

- Cembranos, M. & Gallego, M. (1988). *La escuela y sus posibilidades en la formación de actitudes para convivencia*. Madrid: Narcea.
- Conejeros, M. L., Rojas, J., & Segure, T. (2010). *Confianza: Un valor necesario y ausente en la educación chilena*. Mexico: Perfiles Educativos.
- Cobb, P. (1994). *Learning mathematics: constructivist and interactionist theories of mathematical development*. . Dordrecht: Kluwer Academic.
- Cobo, B. M. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Granada: Universidad de Granada.
- Collis, F. (1974). *Cognitive development and mathematics learning: paper prepared for the Psychology of Mathematics Education Workshop, Centre for Science Education*. London: Chelsea College.
- Contreras, L. (2002). *Dificultades y obstáculos para el cambio en el aula. Una perspectiva desde la Educación Matemática*. España: Universidad de Huelva.
- Contreras, A. (2006). Los registro de representación semiótica y la teoaria de las funciones semiótica. En A. Contreras, L. Ordoñez, & C. Batanero. (Eds.). *Congreso Internacional sobre las Aplicaciones y Desarrollo de la Teoria de las Funciones Semióticas* (41-67). España: Universidad de Jaen.
- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences*. New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activié mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. Grenoble: Université Joseph-Fourier.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (S6), 73-112.
- Chevallard, Y. (1997). Fmilière et problématique, la figure du professeur. *Recherchehs en Didatique des Mathématique*, 17, 17-54.

- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Clemente, M. (1995). *Psicología Social: Métodos y Técnicas de Investigación*. Madrid: Eudema.
- D'Ambrosio, U. (1985). Ethomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44-48.
- D'Ambrosio, B. (1993). Formación de profesores de matemática para el siglo XXI; Grandes desafíos. *Pro-Posições*, 4(1), 14-15.
- D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Magisterio.
- D'Amore, B., & Godino, J., D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de las Matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 191-218.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Neuchatel: Peter Lang.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.). *Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education* (55-69). Hiroshima: PME24.
- Duval, R. (2004). A crucial issue in mathematics education: The ability to change representation register. In M. Niss (Ed.). *10th International Conference on Mathematics Education* (1-17). Dinamarca: ICME10.

- Dunn, O. J., & Clark, V. A. (1987). *Applied statistics: Analysis of variance and regression*. New York: John Wiley.
- Dutton, W. H., & Blum, M. P. (1968). The measurement of attitudes toward arithmetic with a Likert-type test. *Elementary School Journal*, 68, 259-264.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking processes. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (25-41). US: Kluwer Academic Publisher.
- Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Prees.
- Estrada, A. (2008). *Actitudes hacia la estadística e instrumentos de evaluación*. España: Universidad de Lleida.
- Estrada, A., & Díez-Palomar, J. (2011). Las actitudes hacia las matemáticas. Análisis descriptivo de un estudio exploratorio centrado en la educación matemática de familiares. *Revista de Investigación en Educación Matemática*, 9 (2), 116-132.
- Faerna, A. M. (1996). *Introducción a la teoría pragmatista del conocimiento*. Madrid: Siglo XXI.
- Fernández, R., & Aguirre, C. (2010). Actitudes iniciales hacia las matemáticas de los alumnos de grado de magisterio de Educación Primaria: Estudio de una situación en el EEES. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 23, 107-116.
- Fernández, T. (2011). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial*. Santiago de Compostela: USC.
- Fernández, T., Cajaraville, J., & Godino, J. (2011). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial*. Santiago de Compostela: USC de Compostela.
- Fernández, T., Godino, J., & Cajaraville, J. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico. *Bolema*, 26(42), 39-63.

- Fennema, E., & Sherman, J. A. (1976). Mathematics Attitudes Scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7(5), 324-326.
- Font, V. (2002). Una Organización de los Programas de Investigación en Didácticas de las Matemáticas. *Revista EMA*, 7(2), 127-170.
- Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez & M. Torralbo (Eds.). *Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (109-128). Córdoba: Universidad de Córdoba.
- Font, V., & Ramos, A. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional: El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. *Revista en Educación*, 338, 309-346.
- Font, V., & Contreras, A. (2008). The problema of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69(1), 33-52.
- Font, V., Godino, J., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical Practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97-124.
- Fuglestad, A. (2004). ICT tools and students' competence development. In M. Johnsen-Hoines & A. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (439-446). Bergen: PME28.
- Furinghetti, F., & Paula, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a Little difference? In J. Da Ponte, and J. Matos, (Eds.). *Proceedings of the 18th International Conference of the Psychology of Mathematics Education*, (368-375). Portugal: Universidad de Lisboa.
- Flores, W., O., & Auzmendi, E. (2015). Análisis de la estructura factorial de una escala de actitud hacia las matemáticas. *Aula de Encuentro*, 17(1), 45-77.
- Flores, W., O., & Auzmendi, E. (2015). Resolución de problemas matemáticos: Un cuestionario para su evaluación y comprensión. *Ciencia e Interculturalidad*, 16(1), 54-74.
- Freudhental, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic.

- Frege, G. (1996). *Escritos filosóficos*. Barcelona: Critica.
- Frege, G. (1998). Sobre sentido y referencia. En L. Valdés (Ed.). *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (84-111). Tecnos: Madrid.
- Freire, P. (1998). Cultural action for freedom. *Harvard Educational Review*, 68(4), 471-521.
- Thomas, F. & Nelson, L. (2005). College Students experiences with diversity and their effects on Academic self-confidence, social agency and disposition toward critical thinking. *Research in Higher Education*, 46(4), 365-387.
- Gairin, J. (1990). *Las actitudes en educación. Un estudio sobre la educación matemática*. Barcelona: Boixareau Universitaria.
- Gallego-Badillo, R. (2000). *Los problemas de las competencias cognoscitivas. Una discusión necesaria*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- García, M., García, D., & Biencinto, C. (2009). De la exclusión a la inclusión: Una forma de entender y atender la diversidad cultural en las instituciones escolares. *Revista Psicopedagogía*, 26(79), 108-123.
- García, M. (2009). *La competencia conversacional de estudiantes de español como lengua extranjero. Análisis y propuesta didáctica*. Tesis Doctoral: Universidad de Alcalá.
- García, A., Merino, C., Rodríguez, D., Hernández, R., Reyes, F., Abella, L., & Guevara, J. (2013). Orientaciones específicas para la integración de las TIC en la enseñanza de las Ciencias Naturales. En C. Merino, D. Contreras, & M. Borja (Eds.). CAC: *Orientaciones Específicas para la incorporación de tecnología en procesos de formación de profesores de Ciencias Naturales, Lenguaje y Comunicación y Matemáticas en contextos de diversidad de secuencias de enseñanza-aprendizaje* (81-94). Valparaíso: Universidad de Valparaíso.
- Gil, F. (2000). *Marco conceptual y creencias de los profesores sobre evaluación matemática*. Almería: Universidad de Almería.
- Gil, D., & Guzmán, M. (2001). *La enseñanza de las Ciencias y la Matemática: Tendencias e Innovaciones*. Madrid: Popular.
- Gil, J. (2011). *Técnicas e instrumentos para la recogida de información*. Madrid: UNED.

- Gil, N., Blanco, L., & Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 2, 15-32.
- Giménez, J., Díez-Palomar, J., & Civil, M. (2007). *Educación Matemática y Exclusión*. Barcelona: Graó.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.
- Godino, J. D. (2002). *La formación Matemática y didáctica de maestros como campo de acción e investigación para la didáctica de las Matemáticas*. Granada: Universidad de Granada.
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones semióticas. Un enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática*. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm
- Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2005). Análisis onto-semiótico de problemas combinatorios y de su resolución por estudiantes universitarios. *Educational Studies In Mathematics*, 60(1), 3-36.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2006). *Un enfoque ontosemiótico para la Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática*. Universidad de Granada. Disponible en www.urg.es/local/jgodino
- Godino, J. D., Font, V., Contreras, Á., & Wilhelmi, M. (2007). Integración de marcos teóricos en didácticas de las matemáticas. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, F. García (Eds.). *Sociedad, Escuela y Matemáticas, Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica* (53-84). Jaen: Universidad de Jaen.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. (2010). *Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Tecnocientífica*. Granada: Universidad de Granada.

- Godino, J. D. (2011). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Recife: CIAEM-IACME.
- Godino, J. D. (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. En D. Calderón (Eds.). *Perspectivas en la didáctica de las matemáticas* (47-78). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A. Blanco, T. F., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. y Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1), 127-150.
- González, A. (2005). *La generalización de la Integral definida desde las perspectivas numéricas, gráficas y simbólicas utilizando entornos informáticos*. Tenerife: Universidad de Laguna.
- González-Martín, A., & Camacho, M. (2004). What is First-Year Mathematics students' actual understanding about improper integration? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(1), 73-89.
- González, F. & Díez, M. (2004). Las didácticas específicas: consideraciones sobre principios y actividades. *Revista Complutense de Educación*, 15(1), 253-286.
- González-Martín, A. (2005). *Money Puzzles: Colección el Rompecabezas*. Madrid: Nivola.
- González-Pineda, J. A., Fernández-Cueli, M., García, T., Suárez, N., Fernández, E., Tuero-Herrero, E., & Silva, H.. (2012). Diferencias de género en actitudes hacia las matemáticas en la enseñanza obligatoria. *Revista Iberoamericana de Psicología y Salud*, 3(1), 55-73.
- Gómez-Chacón, I. (1997). *Procesos de Aprendizaje en Matemáticas con Poblaciones de Fracaso Escolar en Contexto de Exclusión Social. Las Influencias Afectivas en el Conocimiento de las Matemáticas. Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación*. Madrid: Universidad Complutense.
- Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática Emocional: Los Afectos en el Aprendizaje Matemático*. Madrid: Narcea.

- Gómez-Chacón, I., Contreras, L., & Blanco, L. (2002). Cuestiones Afectivas en la Enseñanza de las Matemáticas. En L. Contreras, & L. Blanco (Eds.) *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente* (23-58). Cáceres: Universidad de Extremadura.
- Gómez-Chacón, I. (2009). Actitudes matemáticas: Propuesta de transición del bachillerato a la universidad. *Educación Matemática*, 21(3), 5-32.
- Gómez, P. (1998). *Calculadoras gráficas y precálculo. Las actitudes de los estudiantes*. Colombia: UED.
- Goñi, M., J. (2007). *Las emociones de los docentes de matemáticas: emotidocencia*. UNO: Revista de didáctica de las matemáticas, 45, 5-7.
- Goñi, M., J. (2008). *El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Grao.
- Gorgorió, N., & Planas, N. (2004). Interacción, diálogo y negociación en el aula de matemáticas. *Aula de Innovación Educativa*, 132(13), 22-35.
- Gorgorió, N., Prat, M., & Santesteban, M. (2006). El aula de matemáticas multicultural: distancia cultural, normas y negociación. *Grao: Didácticas de las Matemáticas*, 7-24.
- Gutiérrez, A. (1991). *La Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Guerrero, E., Blanco, L., & Vicente, F. (2002). *Trastornos emocionales ante la educación matemática*. España: Piramide.
- Gutiérrez, A., & Boero, P. (2006). *Handbook of research on the psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*. Rotterdam: Sense Publisher.
- Gurin, P. (1999). *The compelling need for diversity in higher Education*. Michigan: University of Michigan.
- Gruenwald, N., & Klymchuk, S. (2002). Using Counter Examples to Enhance Students' Conceptual Understanding in Engineering Undergraduate Mathematics: A Parallel Study. *Proceedings of the second international Conference on Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level (ICTM2)*. Hersonisos: Wiley, J.

- Gruenwald, N., & Klymchuk, S. (2003). Using Counter-Examples in Teaching Calculus. *The New Zealand Mathematics Magazine*, 33-41.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw-Hill.
- Heise, D., R., & Bohrnstedt, G., W. (1970). Validity, invalidity, and reliability. In E. E. Borgata & G. W. Bohrnstedt (Eds.). *Sociological methodology* (104-129). San Francisco: Jossey-Bass.
- Hidalgo, S., Morato, A., & Palacios, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destreza y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Revista de Educación Matemática*, 17(2), 89-116.
- Hitt, F. (2000a). Construcción de conceptos matemáticos y de Estructuras Cognitivas. *Representations and Mathematics Visualization del PME-NA22* (131-147). Arizona: PME-NA22.
- Hitt, F. (2000b). Construcción de conceptos matemáticos y uso de calculadoras simbólica. *The Fourth International DERIVE-T189/92 Conference*. UK: CID.
- Hitt, F. (2001). *El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en didácticas de las matemáticas*. Granada: Universidad de Granada.
- Hiebert, J., & Lawrence, E. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert. (Ed.). *Conceptual and Procedural Knowledge the Case of Mathematics* (1-28). Lawrence Erlbaum, Associates, Publisher.
- Inglada, N. & Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental. En J. D. Godino (Ed.). *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (1-18). Córdoba: Universidad de Granada.
- Jimeno-Pérez, M. (2002). *Problemas de y dificultades en el aprendizaje matemático de los niños y niñas de tercer ciclo de primaria*. Malaga: Universidad de Malaga
- Jiménez, M., Espinoza, J., & Morales, I. (2011). *Capacitación docente en tecnologías digitales para la enseñanza de la matemática*. Recife: CLAEM.

- Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. Grouws, (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (390-419). New York: Macmillan Publishing Company.
- Konic, P., & Godino, J. (2011). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales*. Granada: Universidad de Granada.
- Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart, (Ed.). *Childrens understanding of Mathematics* (11-16). Londres: John Murray.
- Klymchuk, S. (2001). Counter examples and conflicts as a remedy to eliminate misconceptions and mistake: A case study. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME25)*. Utrecht: PME25.
- Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the mathematics primary classroom: two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematics Behavior*, 26(1), 60-82.
- Lappan, G., Fey, J., Fitzgerald, W., & Friel, S. (2008). *Bits and Pieces*. Mis-hawaka: Prentice Hall.
- León, O. (2005). Requerimiento matemáticos para los diseños didácticos: La formulación de una relación matemática. En O. León (Eds.). *El conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. Matemáticas y Diversidad* (120-122). Bogotá: ASOCOLME.
- León, O., Bonilla, M., Romero, J., Gil, D., Correal, M., Ávila, C., C., Bacca, J., Cavanzo, A., Guevara, C., Saiz, M., García, R., Saíz, E., Rojas, N., Peralta, M., Flores, W., O., & Márquez, H. (2012). *Referentes Curriculares con Incorporación de Tecnologías para la Formación del Profesorado de Matemática en y para la Diversidad*. México: Universidad Pedagógica de México.
- León, O., Bonilla, M., Romero, J., Gil, D., Correal, M., Ávila, C., C., Bacca, J., Cavanzo, A., Guevara, C., Saiz, M., García, R., Saíz, E., Rojas, N., Peralta, M., Autor 6, & Márquez, H. (2013). CAM: Orientaciones específicas para la integración de las TIC en la enseñanza de las Matemáticas. En C. Merino, D. Contreras, & M. Borja (Eds.). *CAM: Orientaciones Específicas para la incorporación de tecnología en procesos de formación de profesores de Ciencias Naturales, Lenguaje y Comunicación y Matemáticas en contextos de diversidad de secuencias de enseñanza-aprendizaje* (95-110). Valparaíso: Universidad de Valparaíso.

- León, O., Bonilla, M., Romero, J., Gil, D., Correal, M., Ávila, C., C., Bacca, J., Cavanzo, A., Guevara, C., Saiz, M., García, R., Saiz, E., Rojas, N., Peralta, M., Flores, W., O., & Márquez, H. (2014). *CAM: Referentes Curriculares con Incorporación de Tecnologías para la Formación del Profesorado de Matemática en y para la Diversidad*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Legrand, M. (1996). La problématique des situations fondamentales. Confrontation du paradigme des situations à d'autres approches didactiques. *Recherches des Didactique des Mathématiques*, 16(2), 221-280.
- Lerman, S. (2006). Cultural Psychology, anthropology and sociology: the developing 'strong' social turn. *Sense Publisher*, 171-188.
- Lévy, J., & Varela, J. (2003). *Análisis Multivariado para las Ciencias Sociales*. Madrid: Pearson.
- Likert, R. (1976). *Una técnica para la medición de actitudes*. Buenos Aires: Nueva Visión.
- Lim, L., Tso, T.-Y., & Lin, F. (2009). Assessing Science Students' Attitudes to Mathematics: A case Study on a Modeling Project with Mathematical Software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(4), 441-453.
- Mac Lane, S. (1986). *Mathematics form and funtion*. New York: Springer-Verlag.
- Mandler, G. (1989). Affect and Learnig: Causes and Consequences of Emotional Interactions. En D. McLeod, & V. Adams (Eds.). *Affect and Mathematical Problem Solving: A new Perspective (3-19)*. New York: Springer-Verlag.
- Martín, Á., Dolz, D., & Mauri, T. (1997). *La atención a la diversidad en la educación secundaria*. Barcelona: Ice Horsori.
- Martínez-Padrón, O. (2005). Dominio afectivo en Educación Matemática. *Paradigma*, XXIV(2), 7-34.
- Martínez-Padrón, O. (2003). *El dominio afectivo en la Educación Matemática: Aspectos teóricos-referenciales a la luz de los Encuentros Edumaticos*. Venezuela: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.
- Martínez-Padrón, O. & González, F. E. (2005). *Algunos problemas de los problemas que formulan los docentes que enseñan matemática*. Lisboa: EIEM.

- Martínez, O. (2008). Actitud hacia la matemática. *Sapiens: Revista Universitaria de Investigación*, 9(1), 237-256.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1989). *Pensar Matemáticamente*. Barcelona: Centro de Publicaciones del MEC y Editorial Labor, S. A. Traducción: Mariano Martínez Pérez.
- Maschietto, M. (2001). Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'Analyse à l'Université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(1/2), 123-156.
- Massone, M., Simon, M., & Druetta, J. (2003). *Arquitectura de la escuela de sordos*. Washington: Libros en Red.
- Mauri, T. (1993). *El constructivismo en el aula: Que hace el alumno y la aprendan los contenidos escolares*. Barcelona: Grao.
- Mayén, S., Cobo, B., Batanero, C., & Balderas, P. (2007). Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 9, 187-201.
- Miranda, A. (2012). Funcionamiento ejecutivo y motivacionales en el rendimiento académico en Lengua y Matemáticas: Un modelo estructural. *Psicodidáctica*, 17(1), 51-72.
- Moreno, L., & Kaput, J. (2005). Aspectos semióticos de la evolución histórica de la aritmética y el álgebra. En M. Alvarado, & B. Brizuela (Eds.). *Haciendo Números* (31-50). México: Paidós.
- Monaghan, J., Johnson, P., Berry, J., & Maull, W. (1999). Routine questions and examination performance. In O. Zaslavsky (Ed.). *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group on the Psychology of Mathematics Education* (105-112). Israel: PME23.
- Morales, P. (2000). *Medición de actitudes en psicología y educación*. Madrid: Comillas.
- Muñiz, J. (1994). *Teoría clásica de los test*. Madrid: Pirámide.
- Muñiz, J. (2003). *Teoría clásica de los tests*. Madrid: Pirámide.
- Muñoz, J., & Mato, M. (2008). Análisis de las actitudes respecto a las matemáticas en alumnos de ESO. *Revista de Investigación Educativa*, 26(1), 209-226.

- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. En D. Grows (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (575-596). New York: McMillan Publishing Company.
- Myers, D. (1995). *Psicología Social*. Mexico: McGraw-Hill.
- Niss, M. (1994). Challenges to the preparation of teachers of mathematics. *Nordisk matematikdidaktikk*, 2, 31-45.
- Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics*. The Danish KOM Project, Denmark, IMFUFA, Roskilde, University.
- Niss, M., & Jensen T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie*. Danmark: Undervisningsministeriet.
- NCTM. (1989) *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM.
- NCTM. (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemáticas*. Sevilla: SAEM-Thales.
- NCTM. (2000). *Principales estándares para la educación matemática*. Reston, VA: NCTM.
- OECD. (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. Paris: OECD.
- OECD. (2005). Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana. Madrid: Santillana.
- Ortíz, H. (2007). Formación del Profesorado y Atención a la Diversidad: Desafíos a los procesos de Innovación Curricular en Educación Inicial. *Revista Académica*, 33, 45-60.
- Pajarez, R., Sanz, A., & Rico, L. (2004). *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Palarea, M., & Socas, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis Doctoral. Tenerife: Universidad de Laguna.
- Palacios, A., Arias, V., & Arias, B. (2014). Las actitudes hacia las matemáticas: construcción y validación de un instrumento para su medida. *Psicodidáctica*, 19 (1), 67-91.

- Perry, C. A. (2011). Motivation and attitude of preservice elementary teachers toward mathematics. *Morehead State University. School Science and Mathematics, III*(1), 2-10.
- Petriz, M., A., Barona, C., López, R., M., & Quiroz (2010). Niveles de desempeño y actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de la Licenciatura en Administración en una Universidad estatal mexicana. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 15*(4), 1223-1249.
- Pérez-Tyteca, & Castro, E. (2009). Actitudes hacia las matemáticas y rendimiento en alumnos universitarios: Monografía XII. *Indivisa, Boletín de Estudios de Investigación, 12*, 273-382.
- Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (2011). Ansiedad Matemática, Género y Ramas de Conocimiento en Alumnos Universitarios. *Enseñanza de la Ciencia, 29*(2), 237-250.
- Poirier, L. (2001). *Enseigner les maths au primaire; Notes didactiques*. Canada: Éditions du Renouveau Pédagogique Inc. (ERPI).
- Poicaré, H. (1963). *Ciencia y método*. Madrid: Espasa Calpe.
- Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. Mexico: Trillas.
- Postic, M. & De Ketele, J. M. (1992). *Observar situaciones educativas*. Madrid: Narcea.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.
- Planchart, E., Garbin, S., & Gómez-Chacón, I. (2005). *Educación Matemática y Formación de Profesores: Propuesta para Europa y Latinoamérica*. Bilbao: Universidad de Deusto.
- Prado, R. (2004). La igualdad educativa en la interculturalidad: Hacia un perfil específico de la diversidad en Educación Física. *Revista Digital en Deportes, 72*(10). <http://www.efdeportes.com/efd72/divers.htm>
- Quiles, M. N. (1993). Actitudes matemáticas y rendimiento escolar. *Comunicación, Lenguaje y Educación, 18*, 115-125.
- Radford, L. (1999). *On Culture and mind: A post-Vygotskian semiotic perspectiva*. Ontario: Université Laurentienne.

- Rico, L. (1988). *Didáctica activa para la resolución de problemas*. Granada: Universidad de Granada.
- Rico, L. (1997). *Organizadores del currículo de matemáticas*. En L. Rico (Ed.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación Matemática, extraordinario*, 275-294.
- Richard, P. R. (2004). L'inférence figurale: un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational Studies in Mathematics*, 57(2), 229-263.
- Robert, A., & Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis. In D. Holton (Ed.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (283-299). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Rocha, T. C., Cajaraville, J. A., & Labraña, P. A. (2008). *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica*. Santiago de Compostela: USC.
- Rojas, P., & Romero, J. (1999). *Transición Aritmética al Álgebra*. Bogotá: Gaia.
- Roncal, F. (2005). *Evaluación de los Aprendizajes*. Guatemala: Lasalle.
- Ruiz, L., Estepa, A., & García, J. (2007). *Aportaciones de la teoría antropológica de lo Didáctico*. Andalucía: Universidad de Jaén.
- Santrock, J. (2010). *Psicología de la Educación*. México: McGraw-Hill.
- Sáenz-Ludlow, A. (2003). A collective chain of signification in conceptualizing fractions: a case of a fourth-grade class. *Journal of Mathematics*, 22(2), 181-211.
- Selden, A., & Selden, J. (1998). *The role of examples in learning mathematics*. US: Research Sampler, MAA.

- Selden, A., & Selden, J. (2001). Terciaru mathematics education research and its future. In D. Holton (Ed.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (37-254). Ntherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Serrano, L. (1996). *Significado institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Granada: Universidad de Granada.
- Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologías de las matemáticas y de la educación. In A. Bishop (Ed.). *International Handbook of Mathematics Educations* (827-876). Dordrecht,HL: Kluwer, A. P.
- Silbey, R. (2003). Math out loud! Instructor. 112(7), 24-26.
- Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., & Hernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Ed.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (125-154). Barcelona: Horsori.
- Socas, M. (2007). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico*. Tenerife: Universidad de Laguna.
- Socas, M. (2001). *Investigación en didáctica de la matemática vía modelos de competencia. Un estudio en relación con el lenguaje algebraico*. Tenerife: Universidad de Laguna.
- Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des “découpages infinis” de surfaces et de solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2/3) 241-294.
- Schofield, H. (1982). Sex, Grade Level, and the relationship between mathematics attitude and achievement in children. *The Journal of Educational Research*, 75(5), 280-284.
- Schoenfeld, A., H. (1985). *Mathematical problema solving*. Orlando: Academic Press.
- Schoenfeld, A., H. (1998). Reflections on a course in mathematical problema solving. *Research in collegiate Mathematics Education*, 3, 81-113.

- Schoenfeld, A., H. (1999). Looking Towards the 21st: Challenges of Educational Theory and Practice. *Educational Researcher*, 28(7), 4-14.
- Schoenfeld, A & Arcavi, A. (1999). On the meaning of variable. In B. Moses (Ed.). *Algebraic Thinking Grade K-12* (150-156). Reston (Virginia): NCTM.
- Schoenfeld, A. H. (2001). Purposes and methods of research in Mathematics Education. In D. Holton (Ed.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (221-236). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Schau, C., Dauphinee, T., & Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 55, 868-875.
- Shulman, S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, 15, 4-14.
- Skovmose, O. (1994). Towards a philosophy of critical mathematics educations. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Skovsmose, O. (2002). Students Foreground and the politics of learning obstacles. *Second International Congress on Ethnomathematics*. Ouro Preto, Minas Gerais Brazil.
- Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.
- Sriraman, B. (2009). On the identities of mathematics education. Interchange: A Quarterly Review of Education. *Springer*, 40(1), 119-135.
- Sriraman, B., & Lyn, E. (2010). *Theories of Mathematics of Education*. London: Springer.
- Stake, R., E. (1994). *Investigación con estudio de casos*. Madrid. Morata.
- Steiner, H. G. (1984). Theory Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, 5(2), 11-17.
- Steiner, H. G., & Balacheff, N. (1984). *Theory of Mathematics Education*. Bielefeld: Universität Bielefeld.

- Steiner, H. G., & Vermandel, A. (1988). *Fundamento y metodología de la disciplina Educación Matemática*. Bielefeld: Universidad de Bielefeld.
- Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall. (Ed.). *Advanced mathematical thinking (3-21)*. Netherlands: Springer.
- Tapia, M., & Marsh, G. E. (2004). An instrument to measure mathematics attitudes. *Academic Exchange Quarterly*, 8(2), 16.
- TIMSS. (2003). *Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte-INCE.
- TIMSS. (2011). *Marco de la evaluación*. Boston: TIMSS & PIRLS.
- Tinoco, M. (2011). Trayectoria académicas de estudiantes indígenas de la URACCAN-Recinto Bilwi. *Ciencia e Interculturalidad*, 9 (2), 84-100.
- Tobón, S. (2007). *Formación basada en competencias. Pensamiento complejo, diseño curricular y didáctica*. Colombia: Ecoe Ediciones.
- Thompson, A. (1992). Teachers' Beliefs and conceptions: a synthesis of research. En D. Grows (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (127-146). New York: Mac-Millan.
- Trigueros, M. & Ursini, S. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. En F. Hitt (Eds.). *Investigaciones en Matemática Educativa II* (445-463). Grupo Editorial Iberoamericano.
- UNESCO. (2008). *Las tecnologías de la información y comunicación en la formación docente*. Montevideo: Trilce.
- UNESCO (2009). *Las tecnologías de la información y comunicación en la formación docente*. Uruguay: Ediciones Trilce.
- URACCAN. (2008). *Proyecto Educativo Institucional*. Managua: URACCAN.
- URACCAN. (2009). *Currículo; Licenciatura en Ciencias de la Educación con Mención en Matemática*. Nicaragua: URACCAN.

- URACCAN. (2014). *Plan Estratégico Institucional 2014-2019*. Nicaragua: URACCAN.
- Vasco, C., Martínez, A., & Vasco, E. (2008). Educación: Pedagogía y Didáctica una Perspectiva Epistemológica. En G. Hoyos (Ed.). *Filosofía de la Educación* (99-127). Bogotá: Trotta.
- Vergnaud, G. (1990). La Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10(2/3), 133-170.
- Villaveces, J. (2008). *Competencias matemáticas genéricas de los egresados de la educación superior*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Vicente, K. J. (1999). *Cognitive Work Analysis*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Walsh, C. (2001). *La Interculturalidad en la Educación*. Lima: Ministerio de Educación: Programa FORTE-PE.
- Viggiani, B. (1993). *Pesquisa em educação matemática*. San Paulo-Brasil: Pro-Posições-Campinas.
- Watson, A., & Mason, J. (2002). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. In A. Cockburn, & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME26)* (378-385). Norwich: PME26.
- Wertsch, J. (1993). *Voces de la mente: un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada*. Madrid: Visor.
- Wilhelmi, M., Font, V., & Godino, J. (2005). Bases Empíricas de Modelos Teóricos en Didáctica de las Matemáticas: Reflexión sobre la Teoría de las Situaciones Didácticas y el Enfoque Ontológico y Semiótico. *Colloque International "Didactiques: quelles references epistemologiques"*. Bordeaux: AFIRSE-IUFM.
- Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(1), 77-120.
- Wise, S. L. (1985). The development and validation of scale measuring Attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 45, 401-405.

ANEXOS

ANEXO 1. CUESTIONARIO COGNITIVO

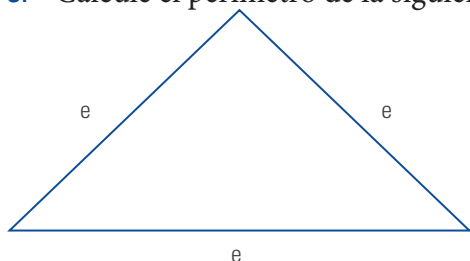
CUESTIONARIO COGNITIVO

Código						
Etnia	Miskito	Mayangna	Creole	Garífuna	Rama	Mestizo
Edad	16-19	20-23	24-27	28-31	32-35	Más de 36
Género	Femenino			Masculino		
Especialidad:						

1. Si a 4 le sumo n puede escribirse como $n+4$. Sume 4 a $3n$. (Justifica su respuesta).

2. Si n multiplicado por 4, puede escribirse como $4n$. Multiplique por 4 a $n+5$. (Justifica su respuesta)

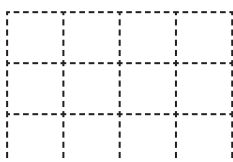
3. Calcule el perímetro de la siguiente figura. Justifique su respuesta.



4. Si $a+b=43 \rightarrow a+b+2=$ (Justifica su respuesta)

5. Si $n-246=762 \rightarrow n-247=$ (Justifica su respuesta).

6. Dado que el área de un rectángulo es igual a la base por la altura. ¿cuál es el área A de la siguiente figura? (Justifica su respuesta).



A=.....

7. Simplifique la siguiente expresión $(a+b)+(a-b)=$ (Justifica su respuesta).

8. Cuando son verdaderas las siguientes expresiones: $L+M+N=L+P+N$ Escribe una x en la respuesta según tu criterio justifique.

Siempre	Nunca	Algunas veces	Cuando...

9. ¿Qué puede decir acerca de b si $b+2$ es igual a $2b$? (Justifica su respuesta)

10. “Una manzana cuesta C\$ 150 y una pera C\$ 200. Si x es el número de manzana y y el número de pera compradas. ¿Qué representa la expresión $150x+200y$? ¿Por qué?”

11. ¿Qué puede decir acerca de a si $a+5$ es igual a 8? (Justifica su respuesta)

12. Si Juan tiene j chibolas y Pedro tiene p chibolas. ¿Qué escribirías para el número de chibolas que tienen en total? (Justifica su respuesta)

13. Si $a=b+3$ ¿Qué pasa con a si b se incrementa en 2? (Justifica su respuesta)

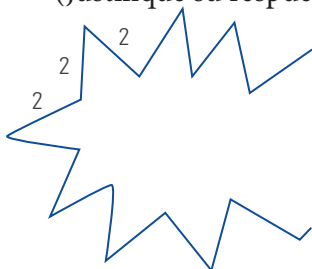
14. ¿Qué puede decirse acerca de r si $r=s+t$ y $r+s+t=30$? (Justifique su respuesta).

15. Si $f=3g+1$ ¿Qué pasa con f si g se incrementa en 2? (Justifica su respuesta)

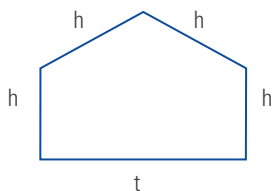
16. ¿Qué se puede decir de u si $u=v+3$ y $v=1$? (Justifica su respuesta)

17. ¿Qué se puede decir de m si $m=3n+1$ y $n=4$? (Justifique su respuesta).

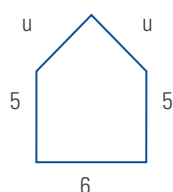
18. Parte de esta figura no está dibujada. Hay n lados de longitud. ¿Cuál es el perímetro? (Justifique su respuesta)



19. ¿Qué podemos escribir para el perímetro de esta figura? (Justifica su respuesta)



20. ¿Qué podemos escribir para el perímetro de esta figura? (Justifica su respuesta)



21. Represente el valor de los lados iguales de un triángulo isósceles, sabiendo que éstos son, respectivamente, 3 cm más grande que el lado desigual y su perímetro es 18 cm. (Justifique su respuesta).

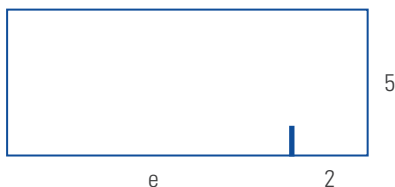
22. ¿Cuál expresión es la mayor, $2n$ o $n+2$? (Justifique su respuesta).

23. En las siguientes expresiones escribe cuál es la menor y cuál es la mayor: $n+1$, $n+4$, $n-3$, n , $n-7$ (Justifique su respuesta).

Menor	Mayor

24. ¿Qué puede decirse acerca de c si $c+d=10$ y c es menor que d ? Justifique su respuesta).

25. ¿Cuál es el área de la siguiente figura? (Justifique su respuesta).



26. Si $e+f=8$ entonces cuanto es $e+f+g=$ (Justifique su respuesta).

27. Completa las siguientes expresiones: (Justifique su respuesta).

$x \rightarrow x+2$

$6 \rightarrow$ _____

$y \rightarrow$ _____

$x \rightarrow 4x$

$3 \rightarrow$ _____

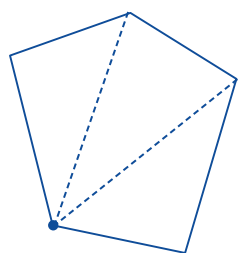
28. Los lápices azules cuestan a 5 córdobas cada uno y los lápices rojos a 6 córdobas cada uno. Si compro algunos lápices azules y rojos que juntos cuesten 90 córdobas, y llamamos a x al número de lápices azules que compro y y el número de lápices rojos que compro. ¿Qué puedes escribir sobre x y y ? (Justifique su respuesta).

29. Si en la ecuación $(x+1)^3+x=349$ es verdadera cuando $x=6$, entonces, qué valor tiene x en la ecuación siguiente: $(5x+1)^3+5x=349$ (Justifique su respuesta).

30. El salario básico de María es de 200 córdobas por semana. También le pagan 20 córdobas por cada hora extra que trabaja. Si h es el número de horas extras que ella trabaja, y si w es el valor de su salario total. Escribir una ecuación vinculando w y h . (Justifique su respuesta).

31. Unas galletas cuestan g córdobas cada una y una torta cuesta t córdobas cada una. Si compro 4 galletas y 3 tortas. ¿Qué significado representa la expresión $4g+3t$? (Justifique su respuesta).

32. En una figura cómo esta, se puede calcular el número de diagonales a partir de la eliminación de 3 de sus lados. Por ejemplo: una figura con 5 lados tiene dos diagonales. (Justifique su respuesta).



Un figura con k lados tiene _____ diagonales

ANEXO 2. ESCALA DE ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS

Escala de Actitud hacia las Matemáticas

Código						
Etnia	Miskito	Mayangna	Creole	Garífuna	Rama	Mestizo
Edad	16-19	20-23	24-27	28-31	32-35	Más de 36
Género	Femenino			Masculino		
Especialidad:						

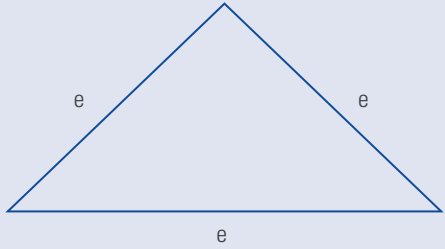
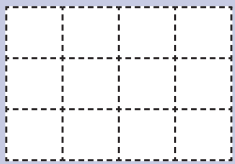
Para cada una de las siguiente preguntas indica en la escala 1 a 5 tu grado de acuerdo, según el siguiente convenio

1	2	3	4	5
Fuertemente en desacuerdo	No estoy de acuerdo	Indiferente	De acuerdo	Fuertemente de acuerdo

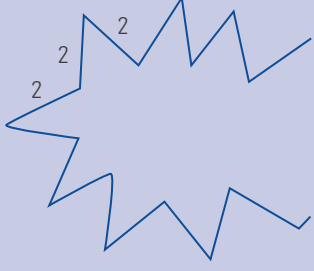
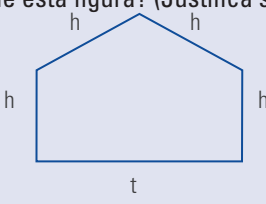
N°	Preguntas	1	2	3	4	5
1	Considero las matemáticas como una materia muy necesario en mis estudios.					
2	La asignatura de matemáticas se me da bastante mal.					
3	Estudiar o trabajar con las matemáticas no me asusta en absoluto.					
4	Utilizar las matemáticas es una diversión.					
5	La matemática es demasiado teórica para que pueda servirme de algo.					
6	Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas.					
7	Las matemáticas es una de las asignaturas que más temo.					
8	Tengo confianza en mí cuando me enfrento a un problema de matemáticas.					
9	Me divierte el hablar con otros de matemáticas.					
10	Las matemáticas pueden ser útiles para el que decida realizar una carrera de "ciencias", pero no para el resto de los estudiantes.					
11	Tener buenos conocimientos de matemáticas incrementará mis posibilidades de trabajo.					

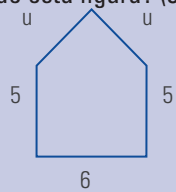
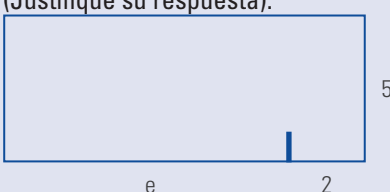
N°	Preguntas	1	2	3	4	5
12	Cuando me enfrento a un problema de matemáticas me siento incapaz de pensar con claridad.					
13	Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando me enfrento a un problema de matemáticas.					
14	Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí.					
15	Espero tener que utilizar poco las matemáticas en mi vida profesional.					
16	Considero que existen otras asignaturas más importantes que las matemáticas para mi futura profesión.					
17	Trabajar con las matemáticas hace que me sienta nervioso/a					
18	No me altero cuando tengo que trabajar en problemas de matemáticas.					
19	Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las matemáticas.					
20	Me provoca una gran satisfacción el llegar a resolver problemas de matemáticas					
21	Para mi futuro profesional la matemática es una de las asignaturas más importantes que tengo que estudiar.					
22	Las matemáticas hacen que me sienta incómodo/a y nervioso/a					
23	Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las matemáticas.					
24	Si tuviera oportunidad me inscribiría en más cursos de matemáticas de los que son obligatorios.					
25	La materia que se imparte en las clases de matemáticas es muy poco interesante.					

ANEXO 3. DISTRIBUCIÓN DEL CUESTIONARIO COGNITIVO EN LOS NIVELES DE COMPLEJIDAD

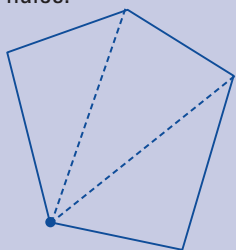
Nº	Item	Niveles de complejidad						Errores	%
		1	2	3	4	5	6		
1	Si a 4 le sumo n puede escribirse como $n+4$. Sume 4 a $3n$. (Justifica su respuesta).	x						$7n$	0,43
2	Si n multiplicado por 4, puede escribirse como $4n$. Multiplique por 4 a $n+5$. (Justifica su respuesta)	x						La letra totalmente ignorada respuesta por los estudiantes 20. Se reconoce la existencia de la letra pero ni se le da el significado, ni se opera con ella. La respuesta de los estudiantes es $(20+n)$	0,45
3	Calcule el perímetro de la siguiente figura. Justifique su respuesta. 	x						Uso incorrecto de la definición de perímetro e^3 Si $e=2$ entonces $p=e^3=2^3=8$	0,46
4	Si $a+b=43 \rightarrow a+b+2=$ (Justifica su respuesta)	x						Algunos de las respuestas demuestran asignación de valores a y b	0,68
5	Si $n-246=762 \rightarrow n-247=$ (Justifica su respuesta).	x						763	0,67
6	Dado que el área de un rectángulo es igual a la base por la altura. ¿cuál es el área A de la siguiente figura? (Justifica su respuesta).  A=.....	x						No contestan	0,73
7	Simplifique la siguiente expresión $(a+b)+(a-b)=$ (Justifica su respuesta).	x						$2a^2 b^2$ $2ab+ab=3ab$	0,59

Nº	Item	Niveles de comple- jidad						Errores	%								
		1	2	3	4	5	6										
8	Cuando son verdaderas las siguientes expresiones: $L+M+N=L+P+N$ Escribe una x en la respuesta según tu criterio justifique. <table><tr><th>Siempre</th><th>Nunca</th><th>Algunas veces</th><th>Cuando...</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	Siempre	Nunca	Algunas veces	Cuando...					x						$L+M+N$ Siempre es igual a $L+P+N$ cuando M y P tienen el mismo valor.	0,46
Siempre	Nunca	Algunas veces	Cuando...														
9	¿Qué puede decir acerca de b si $b+2$ es igual a $2b$? (Justifica su respuesta)		x						Error: No contestan	0,72							
10	“Una manzana cuesta C\$ 150 y una pera C\$ 200. Si x es el número de manzana y y el número de pera compradas. ¿Qué representa la expresión $150x+200y$? ¿Por qué?”		x						15 manzanas + 20 peras 150 manzanas+200 peras=350 frutas	0,48							
11	¿Qué puede decir acerca de a si $a+5$ es igual a 8? (Justifica su respuesta).		x						13	0,70							
12	Si Juan tiene j chibolas y Pedro tiene p chibolas. ¿Qué escribirías para el número de chibolas que tienen en total? (Justifica su respuesta).		x						JP	0,69							
13	Sí $a=b+3$ ¿Qué pasa con a si b se incrementa en 2? (Justifica su respuesta).		x						a incrementa (respuesta parcialmente correcta) $a=b+3=5$ $a=(b+2)+3$ $a+2$ $a=2b+3=5$	0,63							
14	¿Qué puede decirse acerca de r si $r=s+t$ y $r+s+t=30$? (Justifique su respuesta).		x						$s=10; t=10 \Rightarrow r=30-s-t \Rightarrow r=30-10-10 \Rightarrow r=10$	0,38							

Nº	Item	Niveles de complejidad						Errores	%
		1	2	3	4	5	6		
15	Sí $f=3g+1$ ¿Qué pasa con f si g se incrementa en 2? (Justifica su respuesta).		x					f incrementa en 7 (respuesta parcialmente correcta) $f=6g+1$ $f=5g+1$ $f=7$ $f=3+g-1$	0,81
16	¿Qué se puede decir de u si $u=v+3$ y $v=1$? (Justifica su respuesta)			x				2	0,81
17	¿Qué se puede decir de m si $m=3n+1$ y $n=4$? (Justifique su respuesta).			x				$3(4+1) \Rightarrow m=3(5) \therefore m=15$ $m=3(4)+3(1) \Rightarrow m=12+3 \therefore m=15$	0,42
18	Parte de esta figura no está dibujada. Hay n lados de longitud. ¿Cuál es el perímetro? (Justifique su respuesta) 			x				Cálculo del valor por la imagen visual que aporta la figura	0,36
19	¿Qué podemos escribir para el perímetro de esta figura? (Justifica su respuesta) 			x				$4ht$ hhhhht	0,70

Nº	Item	Niveles de comple- jidad						Errores	%				
		1	2	3	4	5	6						
20	¿Qué podemos escribir para el perímetro de esta figura? (Justifica su respuesta) 			x				p=uu556	0,65				
21	Represente el valor de los lados iguales de un triángulo isósceles, sabiendo que éstos son, respectivamente, 3 cm más grande que el lado desigual y su perímetro es 18 cm. (Justifique su respuesta).			x				Error: No hay argumento	0,58				
22	¿Cuál expresión es la mayor, $2n$ o $n+2$? (Justifique su respuesta).				x			$2n$, cuando $n=1, 2, 3$. n (sin justificación) $n+2$ (sin justificación)	0,64				
23	En las siguientes expresiones escribe cuál es la menor y cuál es la mayor: $n+1$, $n+4$, $n-3$, n, $n-7$ (Justifique su respuesta). <table><tr><th>Menor</th><th>Mayor</th></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	Menor	Mayor						x			Error: No contestan	0,73
Menor	Mayor												
24	¿Qué puede decirse acerca de c si $c+d=10$ y c es menor d? Justifique su respuesta).				x			Respuesta con un valor numérico Diferentes valores para una misma letra. Valores negativos para c y positivos para d . Tienen en cuenta la primera condición.	0,48				
25	¿Cuál es el área A de la siguiente figura? (Justifique su respuesta). 					x		$e+10$ $5e^2$ $10e$ e^{10}	0,49				

N°	Item	Niveles de complejidad						Errores	%
		1	2	3	4	5	6		
26	Si $e+f=8$ entonces cuanto es $e+f+g=$ (Justifique su respuesta).					x		La evaluación a partir $e+f=8$ a cada letra por 4. La evaluación de la letra según el orden alfabético.	0,61
27	Completa las siguientes expresiones: (Justifique su respuesta). $x \rightarrow x+2$ $6 \rightarrow$ _____ $y \rightarrow$ _____ $x \rightarrow 4x$ $3 \rightarrow$ _____					x		$x \rightarrow x+2$ $6 \rightarrow x+6$ $y \rightarrow y+y$ $x \rightarrow 4x$ $3 \rightarrow 7$	0,78
28	Los lápices azules cuestan a 5 córdobas cada uno y los lápices rojos a 6 córdobas cada uno. Si compro algunos lápices azules y rojos que juntos cuesten 90 córdobas, y llamamos a x al número de lápices azules que compro y y el número de lápices rojos que compro. ¿Qué puedes escribir sobre x y y ? (Justifique su respuesta).					x		x es un lápiz azul y que y es un lápiz rojo $x+y=90$	0,57
29	Si en la ecuación $(x+1)^3+x=349$ es verdadera cuando $x=6$, entonces, qué valor tiene x en la ecuación siguiente: $(5x+1)^3+5x=349$ (Justifique su respuesta).					x		Los estudiantes realizaron manipulación numéricas dando valores a $x=30,1,2,3,4,6$	0,59
30	El salario básico de María es de 200 córdobas por semana. También le pagan 20 córdobas por cada hora extra que trabaja. Si h es el número de horas extras que ella trabaja, y si w es el valor de su salario total. Escribir una ecuación vinculando w y h . (Justifique su respuesta).					x		$w+h$ $w=20+h$	0,73
31	Unas galletas cuestan g córdobas cada una y una torta cuesta t córdobas cada una. Si compro 4 galletas y 3 tortas. ¿Qué significado representa la expresión $4g+3t$? (Justifique su respuesta).					x		4 galletas y 3 tortas	0,61
32	En una figura cómo esta, se puede calcular el número de diagonales a partir de la eliminación de 3 de sus lados. Por ejemplo: una figura con 5 lados tiene dos diagonales. (Justifique su respuesta). Un figura con k lados tiene _____ diagonales.					x		Error no contestan	0,63



ANEXO 4. DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS MATEMÁTICOS EN EL CUESTIONARIO COGNITIVO

N ^a	Tareas específicas que los estudiantes deben ser capaces de realizar.	Procesos Matemáticos					Representar	%
		Pensar y razonar	Argumentar y Justificar	Comunicar	Modelar	Plantear y Resolver Problemas		
1	Realizar cálculo sencillos que incluya propiedades aditivas de los números reales.						x	0,43
2	Realizar cálculo sencillos que incluya propiedades multiplicativas de los números reales.						x	0,45
3	Utilizar y aplicar definiciones básicas sobre figuras geométricas						x	0,46
4	Sustituir correctamente los números para aplicar un algoritmo numérico o fórmula algebraica sencilla.	x						0,68
5	Realizar cálculos sencillos que incluyan las operaciones aditivas.						x	0,67
6	Realizar cálculos sencillos que impliquen relaciones entre dos variables conocidas	x						0,73
7	Utilizar una representación bidimensional dada para contar o calcular elementos de un objeto.	x						0,59
8	Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero					x		0,46
9	Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero			x				0,72
10	Interpretar y aplicar formulas verbales y manejar y utilizar formulas lineales que represente relaciones del mundo real.			x				0,48

N ^a	Tareas específicas que los estudiantes deben ser capaces de realizar.	Procesos Matemáticos						%
		Pensar y razonar	Argumentar y Justificar	Comunicar	Modelar	Plantear y Resolver Problemas	Representar	
11	Realizar cálculos sencillos que impliquen operaciones aditivas.						x	0,70
12	Interpretar el lenguaje algebraico en los cuales se oculte algún algoritmo sencillo y aplicar dicho algoritmo.						x	0,69
13	Sustituir correctamente los números para explicar la relaciones entre dos variables desconocidas.			x				0,63
14	Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.						x	0,38
15	Interpretar las relaciones entre dos variables a través de la sustitución de un número conocido.			x				0,81
16	Llevar a cabo cálculos explícitamente descritos que comprenden procesos secuenciales.	x						0,81
17	Utilizar los datos relevantes de la descripción de una situación compleja y realizar los cálculos correspondientes.					x		0,42
18	Aplicar algoritmos rutinarios para resolver problemas geométricos.			x				0,36
19	Aplicar algoritmos rutinarios para resolver problemas geométricos						x	0,70

N ^a	Tareas específicas que los estudiantes deben ser capaces de realizar.	Procesos Matemáticos					%
		Pensar y razonar	Argumentar y Justificar	Comunicar	Modelar	Plantear y Resolver Problemas	
20	Utilizar los datos relevantes de la descripción de una situación compleja y realizar los cálculos correspondientes.	x					0,65
21	Interpretar el lenguaje algebraico en los cuales se oculte algún algoritmo sencillo y aplicar dicho algoritmo.					x	0,58
22	Interpretar representaciones complejas para resolver un problema práctico.		x				0,64
23	Utilizar representaciones múltiples para resolver un problema práctico, es decir, interpretar y comprender significados.				x		0,73
24	Analizar un modelo matemático dado que implique una fórmula compleja.					x	0,48
25	Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones		x				0,49
26	Reflexionar sobre la relación entre una fórmula algebraica y los datos subyacentes.				x		0,61
27	Realizar cálculos sencillos que implican relaciones entre una variable conocida. Situación algebraica en contexto de la propiedad conmutativa.	x					0,78

N ^a	Tareas específicas que los estudiantes deben ser capaces de realizar.	Procesos Matemáticos						%
		Pensar y razonar	Argumentar y Justificar	Comunicar	Modelar	Plantear y Resolver Problemas	Representar	
28	Usar comprensivamente el álgebra para resolver problemas; capacidad de manejar expresiones algebraicas para traducir una situación del mundo real.					x		0,57
29	Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.						x	0,59
30	Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.	x						0,73
31	Reflexionar, interpretar y explicar información matemática compleja en el contexto de una situación real desconocida.		x					0,61
32	Aplicar la comprensión geométrica profunda para trabajar con patrones complejos y generalizados.					x		0,63

